Inhaltsverzeichnis des Bandes 142.

Seite

Bachmann, P., Über den Rest von $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ (mod. p) . . . . . 41— 50

Brouwer, L. E. J., Über den natürlichen Dimensionsbegriff . . . . . 146—152

Burrau, C., Numerische Lösung der Gleichung $\frac{2^{-D}\log 2}{1-2^{-2D}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{p_n^{-D}\log p_n}{1-p_n^{-2D}}$, wo p_n die Reihe der Primzahlen von 3 an durchläuft . . . . . 51— 53

Fejér, L., Über die Bestimmung des Sprunges der Funktion aus ihrer Fourierreihe . . . . . 165—188

Jung, H. W. E., Über die ausgezeichneten Kurven algebraischer Flächen . 61—117

Knopp, K., Über *Lambert*sche Reihen . . . . . 283—315

König, R., Beiträge zur Arithmetik der hyperelliptischen Funktionenkörper 191—210

Kürschák, J., Über Limesbildung und allgemeine Körpertheorie . . . . 211—253

Lemke, H., Über die Differentialgleichungen, welche den Gleichgewichtszustand eines gasförmigen Himmelskörpers bestimmen, dessen Teile gegeneinander nach dem *Newton*schen Gesetze gravitieren . . . . 118—145

Lichtenstein, L., Randwertaufgaben der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus I: Die erste Randwertaufgabe. Allgemeine ebene Gebiete . . . . . 1— 40

— — Über das *Poisson*sche Integral und über die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung des logarithmischen Potentials . . . 189—190

Perron, O., Über lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhängig Variable reell ist (Erste Mitteilung.) . . . . . 254—270

Rabinowitsch, G., Eindeutigkeit der Zerlegung in Primzahlfaktoren in quadratischen Zahlkörpern . . . . . 153—164

Remak, R., Neuer Beweis eines Satzes des Herrn *Burnside* über spezielle endliche Gruppen . . . . . 54— 56

— — Neuer Beweis eines *Minkowski*schen Satzes . . . . . 278—282

Rosanes, J., Ein Satz über konjugierte Formen . . . . . 57— 60

— — Zur Theorie der Kegelschnitte . . . . . 271—277

256082

256082

Randwertaufgaben der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. I.

Die erste Randwertaufgabe. Allgemeine ebene Gebiete.

Von Herrn *Leon Lichtenstein* in Berlin.

In einigen früher publizierten Arbeiten habe ich mich mit der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus beschäftigt und unter anderem die erste Randwertaufgabe für ebene analytische Gebiete mit Ecken und beliebige abteilungsweise stetige Randwerte erledigt*). Ich beabsichtige jetzt in einer Reihe zusammenhängender Abhandlungen eine systematische Theorie der elliptischen Randwertaufgaben zu entwickeln. In der vorliegenden Abhandlung wird die erste Randwertaufgabe für beliebige abteilungsweise stetige Randwerte und für alle einfach oder mehrfach zusammenhängenden quadrierbaren, einer gewissen Bedingung der Analysis situs genügenden Gebiete gelöst. Die fragliche Bedingung ist beispielsweise erfüllt, wenn die Begrenzung des betrachteten Gebietes aus Stücken von Kurven mit stetiger Tangente besteht und eine endliche Anzahl beliebiger Ecken oder Spitzen hat. Im übrigen braucht die Existenz einer Tangente im allgemeinen nicht vorausgesetzt zu werden.

Von den Ergebnissen der Potentialtheorie wird, außer den allgemeinen Sätzen, lediglich die Auflösung der ersten Randwertaufgabe für Gebiete mit stetig gekrümmter Berandung als bekannt angenommen. Die Betrachtungen dieser Arbeit liefern daher beiläufig eine neue Methode zur Auflösung des *Dirichlet*schen Problems für die soeben genannten allgemeinen Gebiete.

*) Vgl. insbesondere meine Arbeit: Zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung des elliptischen Typus, Math. Annalen, 1909, S. 559—575, meine beiden Noten in den Comptes rendus de l'Ac. des Sciences, Paris, 1909, sowie eine größere demnächst in den Acta Mathematica erscheinende Arbeit.

Der Gang der Untersuchung ist in großen Zügen dieser:

Die beiden ersten Kapitel beschäftigen sich mit der Differentialgleichung in der Normalform; dabei ist in dem ersten Kapitel in der Hauptsache nur von Gebieten mit stetig gekrümmter Berandung die Rede. In § 1 wird die erste Randwertaufgabe für abteilungsweise stetige Randwerte gelöst. In § 2 werden einige wichtige die *Green*sche Funktion betreffende Ungleichheitsbedingungen abgeleitet. Der § 3 enthält die Verallgemeinerung eines von *Harnack* herrührenden Hilfssatzes der Potentialtheorie und im Anschluß hieran einen sehr einfachen Beweis der bekannten Fundamentalformel, welche die Werte der gesuchten Lösung im Innern des Gebietes durch die Randwerte ausdrückt. Diese Formel gilt, wie in § 3 gezeigt wird, für beliebige abteilungsweise stetige Randwerte. In § 4 wird schließlich das alternierende Verfahren von Herrn *H. A. Schwarz* auf gewisse allgemeinere elliptische Differentialgleichungen ausgedehnt.

In dem zweiten Kapitel wird hierauf zu allgemeinen Bereichen übergegangen. Das betrachtete komplizierte Gebiet wird durch eine unendliche Folge von Gebieten einfacherer Natur approximiert. Unter Zugrundelegung einer speziellen Voraussetzung über die Koeffizienten der Differentialgleichung wird zunächst gezeigt, daß die *Green*schen Funktionen jener Gebiete gegen eine Funktion konvergieren; diese ist die *Green*sche Funktion des gegebenen Gebietes. Den nächsten Schritt bildet die Bestimmung einer auf dem Rande verschwindenden Lösung der nicht homogenen Differentialgleichung; sie gelingt dank den im ersten Kapitel abgeleiteten Hilfssätzen. Eine Grenzbetrachtung führt von diesem Resultate zur Auflösung der ersten Randwertaufgabe bei beliebigen abteilungsweise stetigen Randwerten. Die Auflösung einer gewissen Integralgleichung gestattet endlich die speziellen Voraussetzungen über die Koeffizienten fallen zu lassen.

Im dritten Kapitel wird die allgemeine lineare elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung unter Zuhilfenahme gewisser Ergebnisse von Herrn *E. E. Levi* und vom Verfasser auf die Normalform zurückgeführt. Damit ist die erste Randwertaufgabe vollständig erledigt.

In den später folgenden Abhandlungen wird die zweite und die dritte sowie eine Reihe höherer Randwertaufgaben behandelt. Die Methoden und Ergebnisse der ersten beiden Kapitel dieser Arbeit lassen sich sinngemäß auch auf den Raum übertragen.

Kapitel I. Die elliptischen Differentialgleichungen in der Normalform. Stetig gekrümmte Randkurven.

§ 1. Reguläre Lösungen.

Es sei T ein einfach oder mehrfach zusammenhängendes, von einer endlichen Anzahl geschlossener, doppelpunktloser, stetig gekrümmter Kurven $S_1, S_2, \dots S_n$, die einander weder schneiden noch berühren, begrenztes endliches Gebiet in der Ebene der Variablen x und y. Zur Abkürzung bezeichnen wir die Gesamtheit der Kurven $S_1, \dots S_n$ einfacher mit S. Es sei ferner

$$(1.) \qquad L(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f$$

eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Die Koeffizienten dieser Differentialgleichung sind stetige Funktionen von x und y, die folgende Eigenschaften haben. Die Funktionen a und b haben in T und auf S stetige partielle Ableitungen erster Ordnung, die Funktionen c und f erfüllen im Innern von T die *Hölder*sche Bedingung. Dies besagt, daß jedem ganz im Innern von T gelegenen Bereiche $\mathfrak{T}$ sich eine positive Zahl M und ein positiver echter Bruch λ derart zuordnen lassen, daß, wenn (x, y) und $(x+h, y+h')$ zwei beliebige Punkte in $\mathfrak{T}$ bezeichnen,

$$(2.) \qquad \left.\begin{matrix} |c(x+h, y+h') - c(x, y)| \\ |f(x+h, y+h') - f(x, y)| \end{matrix}\right\} < M\,|\,|h| + |h'|\,|^{\lambda}$$

wird. Auf der Begrenzung S von T sei eine beliebige, abteilungsweise stetige Folge von Werten $\varphi(s)$ gegeben. Es besteht nun der folgende grundlegende Satz:

Von zwei möglichen Fällen tritt entweder der eine oder der andere ein: Entweder hat die Differentialgleichung (1.) *für alle f eine und nur eine beschränkte, in T mit ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige, oder, wie wir kürzer sagen wollen, reguläre Lösung $u(x, y)$, die auf T die Werte $\varphi(s)$ annimmt, oder die homogene partielle Differentialgleichung $L(u) = 0$ hat eine endliche Anzahl linear unabhängiger, in T regulärer, auf S verschwindender Lösungen $u_1(x, y), u_2(x, y), \dots u_m(x, y)$.*

Es sei vorübergehend mit $p(x, y)$ irgendeine in T und auf S stetige Funktion bezeichnet. Die Funktionen

$$\frac{\partial}{\partial x}\iint_T \log\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\}\cdot p(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\iint_T \log\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\}\cdot p(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

erfüllen nach bekannten Sätzen in T und auf S die *Hölder*sche Bedingung*).

Es sei $G(X, Y; x, y)$ die zu dem Gebiete T gehörige, auf S verschwindende, in (X, Y) wie

$$\log\frac{1}{r},\quad r^2=(X-x)^2+(X-y)^2$$

unendliche *Green*sche Funktion der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ und $v(x, y)$ diejenige beschränkte, in T reguläre Potentialfunktion, die auf S die Werte $\varphi(s)$ annimmt.

Betrachten wir die lineare nicht homogene Integralgleichung

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\iint_T\Big[G(x,y;\xi,\eta)\,c(\xi,\eta)-\frac{\partial}{\partial\xi}\{a(\xi,\eta)\,G(x,y;\xi,\eta)\}$$
$$-\frac{\partial}{\partial\eta}\{b(\xi,\eta)\,G(x,y;\xi,\eta)\}\Big]u(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \tag{3.}$$
$$-\frac{1}{2\pi}\iint_T G(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta+v(x,y)$$
$$=I_1(x,y)+I_2(x,y)+v(x,y)$$

und nehmen wir zunächst an, sie sei stets eindeutig lösbar. Das Doppelintegral $I_2(x, y)$ und die Funktion $v(x, y)$ haben in T gewiß stetige partielle Ableitungen der ersten und der zweiten Ordnung. Der Ausdruck $I_1(x, y)$ erfüllt in T, wie aus dem vorhin erwähnten Hilfssatze leicht geschlossen werden kann, die *Hölder*sche Bedingung. Somit hat auch $u(x, y)$ dieselbe Eigenschaft. Hieraus folgt aber, daß $I_1(x, y)+I_2(x, y)+v(x, y)$, daher auch $u(x, y)$ in T stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat.

Es sei jetzt T' irgendein von einer endlichen Anzahl stetig gekrümmter Kurven S' begrenztes Gebiet ganz im Innern von T, und es möge (x, y) in T' enthalten sein. Zerlegt man $I_1(x, y)$ den Gebieten T' und $T-T'$ entsprechend in zwei Summanden und führt man in dem ersteren eine teilweise Integration aus, so findet man

---

*) Vgl. z. B. *Dini*, Sur la méthode des approximations successives pour les équations aux derivées partielles du deuxième ordre, Acta Mathematica, Bd. XXV, 1902, S. 185–230.

$$
\begin{aligned}
u(x,y) = {} & \frac{1}{2\pi}\iint_{T'} G(x,y;\xi,\eta)\left[c(\xi,\eta)u + a(\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial \xi} + b(\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial \eta}\right] d\xi\, d\eta \\
& - \frac{1}{2\pi}\int_{S'} G(x,y;\xi,\eta)\, u(\xi,\eta)[a(\xi,\eta)\,d\eta - b(\xi,\eta)\,d\xi] \\
& + \frac{1}{2\pi}\iint_{T-T'}\Big[G(x,y;\xi,\eta)c(\xi,\eta) - \frac{\partial}{\partial \xi}\{a(\xi,\eta)\,G(x,y;\xi,\eta)\} \\
& - \frac{\partial}{\partial \eta}\{b(\xi,\eta)G(x,y;\xi,\eta)\}\Big] u(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \qquad (4.) \\
& - \frac{1}{2\pi}\iint_{T} G(x,y;\xi,\eta)\, f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta + v(x,y) \\
= {} & I_3(x,y) + I_4(x,y) + I_5(x,y) + I_2(x,y) + v(x,y).
\end{aligned}
$$

Die Integrale $I_4(x,y)$ und $I_5(x,y)$ sind gewisse im Innern von T' reguläre Potentialfunktionen, $I_3(x,y)$ hat daselbst stetige partielle Ableitungen erster Ordnung, die ihrerseits der *Hölder*schen Bedingung genügen. Die Funktion $u(x,y)$ hat daher dieselbe Eigenschaft. Aus einem bekannten Satze der Potentialtheorie folgt nunmehr, daß $I_3(x,y)$, somit auch $u(x,y)$ im Innern von T' stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung hat. Es ist schließlich in T', somit auch überall in T

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -c(x,y)\,u - a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} - b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + f(x,y).$$

Betrachten wir jetzt die Integralgleichung (3.) noch einmal. Nach bekannten Sätzen konvergiert $I_2(x,y)$ bei der Annäherung an den Rand gleichmäßig gegen Null. Man beweist in ähnlicher Weise, daß das Integral $I_1(x,y)$ dieselbe Eigenschaft hat*). Ist nun (x_0, y_0) irgendein von den Unstetigkeitspunkten von $\varphi(s)$ verschiedener Punkt auf S und ist s_0 der zugehörige Wert der Bogenlänge, so konvergiert $u(x,y)$ bei der Annäherung an (x_0, y_0) offenbar gegen $v(x_0, y_0)$, somit gegen $\varphi(s_0)$. In jedem die Unstetigkeitspunkte nicht enthaltenden, zusammenhängenden Teile von S ist der Grenzübergang gleichmäßig.

Ist die Integralgleichung (3.) nicht stets lösbar und hat die zugehörige homogene Integralgleichung m linear unabhängige Lösungen $u_1(x,y), \ldots u_m(x,y)$, so sind diese, wie man in ähnlicher Weise zeigen kann, in T reguläre, auf S verschwindende Lösungen der Differentialgleichung

*) Es genügt hierzu zu wissen, daß $u(x,y)$ in T und auf S beschränkt und im Innern von T stetig ist. Über das Verhalten von $u(x,y)$ bei der Annäherung an den Rand, das durch diese Betrachtung erst erschlossen werden soll, braucht man also weiter nichts vorauszusetzen.

$$(5.) \qquad L(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0.$$

Es sei nun umgekehrt $u(x, y)$ eine beschränkte, in T reguläre Lösung der Differentialgleichung (1.), die auf S die Werte $\varphi(s)$ annimmt*). Es mögen ferner $v'(x, y)$ diejenige in T' reguläre Potentialfunktion, die auf S' gleich $u(x, y)$ ist, $G'(X, Y; x, y)$ die zu T' gehörige klassische *Green*sche Funktion bezeichnen. Offenbar ist für alle (x, y) in T'

$$(6.) \quad \begin{aligned} u(x, y) = {} & \frac{1}{2\pi}\iint_{T'} G'(x, y; \xi, \eta)\left[c(\xi, \eta)\, u + a(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \xi} + b(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \eta}\right] d\xi\, d\eta \\ & - \frac{1}{2\pi}\iint_{T'} G'(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + v'(x, y), \end{aligned}$$

wofür man nach einer teilweisen Integration auch setzen kann

$$\begin{aligned} u(x, y) = {} & -\frac{1}{2\pi}\iint_{T'}\Big[\frac{\partial}{\partial \xi}\{a(\xi, \eta)\, G'(x, y; \xi, \eta)\} \\ & + \frac{\partial}{\partial \eta}\{b(\xi, \eta)\, G'(x, y; \xi, \eta)\} - c(\xi, \eta)\, G'(x, y; \xi, \eta)\Big] u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \\ & - \frac{1}{2\pi}\iint_{T'} G'(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi\, d\eta + v'(x, y). \end{aligned}$$

Läßt man jetzt das Gebiet T' gegen T konvergieren, so konvergieren die Ausdrücke $G'(x, y; \xi, \eta)$, $\frac{\partial}{\partial \xi} G'(x, y; \xi, \eta)$, $\frac{\partial}{\partial \eta} G'(x, y; \xi, \eta)$ für alle (ξ, η) in jedem ganz im Innern von T enthaltenen Gebiete $\bar{T}$, welches den Punkt (x, y) nicht enthält, gleichmäßig gegen $G(x, y; \xi, \eta)$, $\frac{\partial}{\partial \xi} G(x, y; \xi, \eta)$, $\frac{\partial}{\partial \eta} G(x, y; \xi, \eta)$. Es ist ferner

$$\lim v'(x, y) = v(x, y).$$

Man erhält daher durch den Übergang zur Grenze die Beziehung

$$\begin{aligned} u(x, y) = {} & -\frac{1}{2\pi}\iint_{T}\Big[\frac{\partial}{\partial \xi}\{a(\xi, \eta)\, G(x, y; \xi, \eta)\} \\ & + \frac{\partial}{\partial \eta}\{b(\xi, \eta) G(x, y; \xi, \eta)\} - c(\xi, \eta)\, G(x, y; \xi, \eta)\Big] u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \\ & - \frac{1}{2\pi}\iint_{T} G(x, y; \xi, \eta)\, f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + v(x, y). \end{aligned}$$

*) Diese Aussage wollen wir dahin präzisieren, daß $u(x, y)$ sich in jedem die Unstetigkeitspunkte von $\varphi(s)$ nicht enthaltenden zusammenhängenden Teile von T, die Begrenzung eingeschlossen, stetig verhalten soll. Dies steht natürlich völlig im Einklang mit dem soeben festgestellten Verhalten der Lösung der Integralgleichung (3.).

Dies ist aber die Integralgleichung (3.), von der wir ausgegangen sind. *Die vorhin gefundene Lösung ist somit die einzig vorhandene.*

Ist andererseits $u_k(x, y)$ eine in T reguläre, am Rande verschwindende Lösung der Differentialgleichung (5.), so findet man in ähnlicher Weise die Beziehung

$$u_k(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \iint_T \left[\frac{\partial}{\partial \xi}(aG) + \frac{\partial}{\partial \eta}(bG) - cG\right] u_k(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta .$$

Die Integralgleichung (3.), bzw. die zugehörige homogene Integralgleichung, ergibt also in allen Fällen *sämtliche* Lösungen des Problems. Der eingangs aufgestellte Satz ist vollständig bewiesen.

Die Entwicklungen dieses Paragraphen reproduzieren im wesentlichen eine von mir in den Comptes rendus veröffentlichte Note*). Dasselbe Verfahren führt auch bei ebenen analytischen Gebieten mit Ecken zum Ziele. Näheres hierüber, wie auch die vollständige Durchführung der bei der Auflösung der Integralgleichung (3.) notwendigen Iterationen wird die in den Acta Mathematica erscheinende ausführliche Arbeit enthalten.

Wir haben vorhin vorausgesetzt, daß c und f in T der *Hölder*schen Bedingung genügen. Es mögen jetzt diese Funktionen vorübergehend als schlechthin stetig angenommen werden. Man überzeugt sich alsdann leicht, daß $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$ auch jetzt noch in T stetig sind und der *Hölder*-

*) Sur la détermination des intégrales de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f$$

par leurs valeurs le long d'un contour fermé, C. R. de l'Ac. des Sc., Paris, t. CXLIX, 1909, pg. 624—627. — Der in diesem Paragraphen abgeleitete Fundamentalsatz ist zuerst von Herrn *Hilbert* bewiesen worden. (Vgl. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, zweite Mitteilung, Nachr. d. Ges. d. W., Göttingen, math.-phys. Kl., 1904, S. 248 ff.) Die Entwicklungen von Herrn *Hilbert* setzen stetig gekrümmte Randkurven und Randwerte voraus, die, als Funktion der Bogenlänge betrachtet, stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung haben. (Vgl. hierzu die analogen Entwicklungen von Herrn *Picard*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1906, pg. 250—254 und Annales de l'École Normale, 1906, pg. 509 ff.). In einer in den Mathematischen Annalen, Bd. LXVII (1909), S. 559—575 veröffentlichten Arbeit habe ich auf einem von dem hier eingeschlagenen abweichenden Wege die Existenz der Lösung unter der Voraussetzung schlechthin stetiger Randwerte und stetig gekrümmter Randkurven dargetan.

$$(5.)\qquad L(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0.$$

Es sei nun umgekehrt $u(x, y)$ eine beschränkte, in T reguläre Lösung der Differentialgleichung (1.), die auf S die Werte $\varphi(s)$ annimmt*). Es mögen ferner $v'(x, y)$ diejenige in T' reguläre Potentialfunktion, die auf S' gleich $u(x, y)$ ist, $G'(X, Y; x, y)$ die zu T' gehörige klassische *Green*sche Funktion bezeichnen. Offenbar ist für alle (x, y) in T'

$$(6.)\quad \begin{aligned} u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\iint_{T'} G'(x, y; \xi, \eta)\left[c(\xi, \eta)\, u + a(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \xi} + b(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \eta}\right] d\xi\, d\eta \\ - \frac{1}{2\pi}\iint_{T'} G'(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + v'(x, y), \end{aligned}$$

wofür man nach einer teilweisen Integration auch setzen kann

$$\begin{aligned} u(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\iint_{T'} \Big[\frac{\partial}{\partial \xi}\{a(\xi, \eta)\, G'(x, y; \xi, \eta)\} \\ + \frac{\partial}{\partial \eta}\{b(\xi, \eta)\, G'(x, y; \xi, \eta)\} - c(\xi, \eta)\, G'(x, y; \xi, \eta)\Big] u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \\ - \frac{1}{2\pi}\iint_{T'} G'(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + v'(x, y). \end{aligned}$$

Läßt man jetzt das Gebiet T' gegen T konvergieren, so konvergieren die Ausdrücke $G'(x, y; \xi, \eta)$, $\frac{\partial}{\partial \xi} G'(x, y; \xi, \eta)$, $\frac{\partial}{\partial \eta} G'(x, y; \xi, \eta)$ für alle (ξ, η) in jedem ganz im Innern von T enthaltenen Gebiete $\bar{T}$, welches den Punkt (x, y) nicht enthält, gleichmäßig gegen $G(x, y; \xi, \eta)$, $\frac{\partial}{\partial \xi} G(x, y; \xi, \eta)$, $\frac{\partial}{\partial \eta} G(x, y; \xi, \eta)$. Es ist ferner

$$\lim v'(x, y) = v(x, y).$$

Man erhält daher durch den Übergang zur Grenze die Beziehung

$$\begin{aligned} u(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\iint_{T} \Big[\frac{\partial}{\partial \xi}\{a(\xi, \eta)\, G(x, y; \xi, \eta)\} \\ + \frac{\partial}{\partial \eta}\{b(\xi, \eta) G(x, y; \xi, \eta)\} - c(\xi, \eta) G(x, y; \xi, \eta)\Big] u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \\ - \frac{1}{2\pi}\iint_{T} G(x, y; \xi, \eta)\, f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + v(x, y). \end{aligned}$$

*) Diese Aussage wollen wir dahin präzisieren, daß $u(x, y)$ sich in jedem die Unstetigkeitspunkte von $\varphi(s)$ nicht enthaltenden zusammenhängenden Teile von T, die Begrenzung eingeschlossen, stetig verhalten soll. Dies steht natürlich völlig im Einklang mit dem soeben festgestellten Verhalten der Lösung der Integralgleichung (3.).

Dies ist aber die Integralgleichung (3.), von der wir ausgegangen sind. *Die vorhin gefundene Lösung ist somit die einzig vorhandene.*

Ist andererseits $u_k(x, y)$ eine in T reguläre, am Rande verschwindende Lösung der Differentialgleichung (5.), so findet man in ähnlicher Weise die Beziehung

$$u_k(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \iint_T \left[\frac{\partial}{\partial \xi}(aG) + \frac{\partial}{\partial \eta}(bG) - cG\right] u_k(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta .$$

Die Integralgleichung (3.), bzw. die zugehörige homogene Integralgleichung, ergibt also in allen Fällen *sämtliche* Lösungen des Problems. Der eingangs aufgestellte Satz ist vollständig bewiesen.

Die Entwicklungen dieses Paragraphen reproduzieren im wesentlichen eine von mir in den Comptes rendus veröffentlichte Note*). Dasselbe Verfahren führt auch bei ebenen analytischen Gebieten mit Ecken zum Ziele. Näheres hierüber, wie auch die vollständige Durchführung der bei der Auflösung der Integralgleichung (3.) notwendigen Iterationen wird die in den Acta Mathematica erscheinende ausführliche Arbeit enthalten.

Wir haben vorhin vorausgesetzt, daß c und f in T der *Hölder*schen Bedingung genügen. Es mögen jetzt diese Funktionen vorübergehend als schlechthin stetig angenommen werden. Man überzeugt sich alsdann leicht, daß $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$ auch jetzt noch in T stetig sind und der *Hölder*-

*) Sur la détermination des intégrales de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f$$

par leurs valeurs le long d'un contour fermé, C. R. de l'Ac. des Sc., Paris, t. CXLIX, 1909, pg. 624—627. — Der in diesem Paragraphen abgeleitete Fundamentalsatz ist zuerst von Herrn *Hilbert* bewiesen worden. (Vgl. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, zweite Mitteilung, Nachr. d. Ges. d. W., Göttingen, math.-phys. Kl., 1904, S. 248 ff.) Die Entwicklungen von Herrn *Hilbert* setzen stetig gekrümmte Randkurven und Randwerte voraus, die, als Funktion der Bogenlänge betrachtet, stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung haben. (Vgl. hierzu die analogen Entwicklungen von Herrn *Picard*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1906, pg. 250—254 und Annales de l'École Normale, 1906, pg. 509 ff.). In einer in den Mathematischen Annalen, Bd. LXVII (1909), S. 559—575 veröffentlichten Arbeit habe ich auf einem von dem hier eingeschlagenen abweichenden Wege die Existenz der Lösung unter der Voraussetzung schlechthin stetiger Randwerte und stetig gekrümmter Randkurven dargetan.

schen Bedingung genügen. Aus einem von mir neuerdings bewiesenen Satze über die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung des logarithmischen Potentials*) folgt, daß für alle T' die Ausdrücke

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\quad w=\frac{1}{2\pi}\iint_{T'} G'\left[cu+a\frac{\partial u}{\partial \xi}+b\frac{\partial u}{\partial \eta}-f\right]d\xi\, d\eta,$$

somit nach (6.) die Ausdrücke $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ überall in T', außer höchstens in den Punkten einer gewissen Menge (M) vom Maße Null, existieren und nebst ihren Quadraten im *Lebesgue*schen Sinne integrierbar sind. In $T'-(M)$ genügt $u(x,y)$ der Differentialgleichung (1.). Analoges läßt sich über die etwa vorhandenen Lösungen $u_k(x,y)$ $(k=1,\dots m)$ aussagen.

§ 2. Die am Rande verschwindende *Green*sche Funktion.

Es sei (X,Y) irgendein Punkt im Innern von T. Wir nehmen an, daß die Differentialgleichung (5.) keine von Null verschiedene, in T reguläre, auf S verschwindende Lösung hat, und suchen diejenige in T, außer in (X,Y), reguläre Lösung $\mathfrak{G}(X,Y;x,y)$ von (5.) zu bestimmen, die auf S verschwindet und in der Umgebung von (X,Y) wie $\log\frac{1}{r}$ unendlich wird. Die Ausdrücke

$$(7.)\qquad U(x,y)=\mathfrak{G}(X,Y;x,y)-\log\frac{1}{r},$$
$$\frac{\partial U}{\partial x}\left|\log\frac{1}{r}\right|,\quad \frac{\partial U}{\partial y}\left|\log\frac{1}{r}\right|$$

sollen, als Funktionen von (x,y) aufgefaßt, in der Umgebung von (X,Y) beschränkt sein.

Die Funktion $U(x,y)$ ist eine in T, außer vielleicht in (X,Y), reguläre Lösung der Differentialgleichung

$$(8.)\qquad L(U)=-L\left(\log\frac{1}{r}\right)=\frac{a(x-X)+b(y-Y)}{r^2}-c\log\frac{1}{r}=\Phi(x,y).$$

Am Rande nimmt $U(x,y)$ die Werte $-\log\frac{1}{r}$ an.

Es sei, wie üblich,

$$(9.)\qquad G(X,Y;x,y)=\log\frac{1}{r}+g(X,Y;x,y).$$

---

*) Vgl. Über das *Poisson*sche Integral und über die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung des logarithmischen Potentials, dieses Journal, Bd. 141, 1912, S. 12—42.

Die Funktion $U(x, y)$ ist die Lösung der linearen Integralgleichung

$$(10.)\quad U(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\iint_T \Big[\frac{\partial}{\partial\xi}(aG) + \frac{\partial}{\partial\eta}(bG) - cG\Big] U(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$
$$-\frac{1}{2\pi}\iint_T G(x,y;\xi,\eta)\,\Phi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta + g(X,Y;x,y)^*).$$

Es läßt sich zeigen, daß die Lösung $U(x, y)$ von (10.) in (X, Y) sich stetig verhält und die Ausdrücke (7.) daselbst tatsächlich beschränkt sind**).

Wir beweisen jetzt, *daß die partiellen Ableitungen* $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ *bei der Annäherung an den Rand sich stetig verhalten.* Hierzu bemerken wir zunächst, daß nach bekannten Sätzen $\frac{\partial}{\partial x} g(X, Y; x, y)$, $\frac{\partial}{\partial y} g(X, Y; x, y)$ gewiß auf S stetig sind. Sodann betrachten wir die simultanen linearen Integralgleichungen

$$(11.)\quad \begin{cases} U_1(x,y) = \dfrac{1}{2\pi}\iint_T \dfrac{\partial}{\partial x} G(x,y;\xi,\eta)[a(\xi,\eta)\,U_1(\xi,\eta) + b(\xi,\eta)\,U_2(\xi,\eta) \\ \qquad\qquad + c(\xi,\eta)\,U(\xi,\eta) - \Phi(\xi,\eta)]\,d\xi\,d\eta + \dfrac{\partial}{\partial x} g(X,Y;x,y), \\ U_2(x,y) = \dfrac{1}{2\pi}\iint_T \dfrac{\partial}{\partial y} G(x,y;\xi,\eta)\,[a(\xi,\eta)\,U_1(\xi,\eta) + b(\xi,\eta)\,U_2(\xi,\eta) \\ \qquad\qquad + c(\xi,\eta)\,U(\xi,\eta) - \Phi(\xi,\eta)]\,d\xi\,d\eta + \dfrac{\partial}{\partial y} g(X,Y;x,y). \end{cases}$$

Wir nehmen zunächst an, daß sie eindeutig lösbar sind. Die beiden Integrale

$$\iint_T \frac{\partial}{\partial x} G(x,y;\xi,\eta)\,\Phi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta, \qquad \iint_T \frac{\partial}{\partial y} G(x,y;\xi,\eta)\,\Phi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

---

*) In der Gleichung (1.) bezeichnet $f(x, y)$ eine in T und auf S stetige, in T der *Hölder*schen Bedingung genügende Funktion. Die Funktion $\Phi(x, y)$ wird demgegenüber in (X, Y) von der ersten Ordnung unendlich groß. Es genügt indessen den Punkt (X, Y) durch einen kleinen Kreis auszuschließen und zur Grenze überzugehen, um die Integralgleichung (10.) zu erhalten. Man hat hierbei zu beachten, daß nach der Voraussetzung die Ausdrücke (7.) in der Umgebung von (X, Y) beschränkt sind.

**) Dies folgt leicht aus (10.) und aus den Integralgleichungen, denen $\frac{\partial U}{\partial x}$ und $\frac{\partial U}{\partial y}$ genügen. (Vgl. die Betrachtungen auf Seiten 10 und 11.) — Die Existenz der *Green*schen Funktion ist auf einem anderen Wege zuerst von Herrn *Hilbert* bewiesen worden. Vgl. a. a. O. S. 247 ff.

werden im Punkte (X, Y) logarithmisch unendlich. Die Funktionen $U_1(x, y)$ und $U_2(x, y)$ haben offenbar dieselbe Eigenschaft, sind aber sonst in T und auf S stetig. Es sei

$$(12.)\quad U_0(x,y) = \frac{1}{2\pi}\iint_T G(x,y;\xi,\eta)[a(\xi,\eta)\,U_1(\xi,\eta) + b(\xi,\eta)\,U_2(\xi,\eta) + c(\xi,y)\,U(\xi,\eta) - \Phi(\xi,\eta)]\,d\xi\,d\eta + g(X,Y;x,y).$$

Aus (11.) und (12.) ergibt sich für alle von (X, Y) verschiedenen Punkte (x, y)

$$(13.)\qquad U_1(x,y) = \frac{\partial U_0}{\partial x}, \quad U_2(x,y) = \frac{\partial U_0}{\partial y}$$

und daher nach einer teilweisen Integration

$$U_0(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\iint_T \Big[\frac{\partial}{\partial\xi}\{a(\xi,\eta)\,G(x,y;\xi,\eta)\} + \frac{\partial}{\partial\eta}\{b(\xi,\eta)\,G(x,y;\xi,\eta)\}\Big]U_0(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta + \frac{1}{2\pi}\iint_T c(\xi,\eta)\,G(x,y;\xi,\eta)\,U(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta - \frac{1}{2\pi}\iint_T \Phi(\xi,\eta)\,G(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta + g(X,Y;x,y).$$

Aus dieser Gleichung und aus der Beziehung (10.) folgt, wenn man $U_0(x, y) - U(x, y) = \mu(x, y)$ setzt,

$$\mu(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\iint_T \Big[\frac{\partial}{\partial\xi}\{a(\xi,\eta)G(x,y;\xi,\eta)\} + \frac{\partial}{\partial\eta}\{b(\xi,\eta)\,G(x,y;\xi,\eta)\}\Big]\mu(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Man überzeugt sich wie in § 1, daß $\mu(x, y)$ in T stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung hat, auf S verschwindet und der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mu}{\partial y^2} + a\frac{\partial\mu}{\partial x} + b\frac{\partial\mu}{\partial y} = 0$$

genügt. Offenbar ist daher $\mu(x, y) \equiv 0$, $U_0(x, y) \equiv U(x, y)$.

Es ist leicht einzusehen, daß die Integralgleichungen (11.) in der Tat eindeutig lösbar sind. Es sei dies nicht der Fall, und es sei $U_1'(x, y)$ und $U_2'(x, y)$ ein System der Lösungen der zu (9.) gehörigen homogenen Integralgleichungen. Wir setzen

$$U_0'(x,y) = \frac{1}{2\pi}\iint_T G(x,y;\xi,\eta)\,\{a(\xi,\eta)\,U_1'(\xi,\eta) + b(\xi,\eta)\,U_2'(\xi,\eta)\}\,d\xi\,d\eta$$

und finden

$$U_1'(x,y)=\frac{\partial U_0'(x,y)}{\partial x},\quad U_2'(x,y)=\frac{\partial U_0'(x,y)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 U_0'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_0'}{\partial y^2}+a\frac{\partial U_0'}{\partial x}+b\frac{\partial U_0'}{\partial y}=0.$$

Da $U_0'(x,y)$ in T regulär ist und auf S verschwindet, so ist offenbar

$$U_0'(x,y)\equiv 0,$$

daher auch

$$U_1'(x,y)\equiv U_2'(x,y)\equiv 0.$$

Aus den zuletzt durchgeführten Überlegungen folgt, *daß die Funktionen*

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}=U_1(x,y),\quad \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=U_2(x,y),$$

somit auch die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{G}(X,Y;x,y)$, $\frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{G}(X,Y;x,y)$ *sich auf S stetig verhalten.*

In ähnlicher Weise kann man zeigen, *daß, wenn die in* § 1 *vorkommende Randfunktion $\varphi(s)$ stetig ist und stetige Ableitungen der beiden ersten Ordnungen hat, oder auch nur wenn* $\frac{d\varphi(s)}{ds}$ *der Hölderschen Bedingung genügt, die partiellen Ableitungen erster Ordnung der zugehörigen Lösung*

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x},\quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$$

sich auf S stetig verhalten. Die partiellen Ableitungen erster Ordnung der etwa vorhandenen singulären Lösungen $\frac{\partial u_k(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial u_k(x,y)}{\partial y}$ *sind gleichfalls auf S stetig.*

Bevor wir weiter gehen, müssen wir noch zwei Ungleichheiten ableiten, von denen wir weiter unten wiederholt Gebrauch machen werden. Aus (8.), (9.) und (10.) ergibt sich die Integralgleichung

$$\mathfrak{G}(X,Y;x,y)=\frac{1}{2\pi}\iint_T\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}\{a(\xi,\eta)G(x,y;\xi,\eta)\}+\frac{\partial}{\partial\eta}\{b(\xi,\eta)G(x,y;\xi,\eta)\}$$

(14.)
$$-c(\xi,\eta)G(x,y;\xi,\eta)\Big]\mathfrak{G}(X,Y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$
$$+G(X,Y;x,y).$$

Für alle nicht zusammenfallenden Punktepaare (X,Y) und (x,y) in T und auf S gilt bekanntlich eine Beziehung

(15.)
$$|G(X,Y;x,y)|<\Big|\log\frac{1}{r}\Big|+A_1,$$

worin A_1, ebenso wie weiter unten $A_2, A_3, \ldots$, eine gewisse positive Zahlgröße bezeichnet. Die Integralgleichung (14.) ist einer Integralgleichung von der Form

$$(16.)\quad \mathfrak{G}(X, Y; x, y) = \iint_T K(x, y; \xi, \eta)\, \mathfrak{G}(X, Y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + I(X, Y; x, y),$$

die sich durch zweimalige Iteration aus (14.) ergibt, äquivalent. Der Kern $K(x, y; \xi, \eta)$ ist durchweg stetig, die Funktion $I(X, Y; x, y)$ erfüllt eine der Formel (15.) analoge Beziehung. Aus (16.) folgt nach der bekannten *Fredholm*schen Auflösungsformel, wenn $K_0(x, y; \xi, \eta)$ den zu $K(x, y; \xi, \eta)$ gehörigen lösenden Kern bezeichnet,

$$\mathfrak{G}(X, Y; x, y) = I(X, Y; x, y) + \iint_T K_0(x, y; \xi, \eta) I(X, Y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

daher

$$(17.)\qquad |\mathfrak{G}(X, Y; x, y)| < \left|\log \frac{1}{r}\right| + A_2.$$

Diese Beziehung gilt wie die Ungleichheit (15.) *für alle nicht zusammenfallenden Punktepaare* (X, Y) *und* (x, y) *in* T *und auf* S. Es sei $P = (x', y')$ irgendein Punkt auf S und ω eine beliebig kleine positive Zahl. Nach einem bekannten Satze der Potentialtheorie läßt sich eine positive Größe $\delta(\omega) < \frac{\omega}{2}$ angeben, so daß für alle (X, Y) in T und auf S, deren Entfernung von P den Wert $\delta(\omega)$ nicht übersteigt, und für alle (x, y) in T und auf S, die um mehr als ω von P entfernt sind,

$$G(X, Y; x, y) < \omega.$$

Man überzeugt sich leicht, wenn man das Bildungsgesetz von $I(X, Y; x, y)$ beachtet, daß sich eine positive Zahl $\delta_1(\omega) < \frac{\omega}{2}$ angeben läßt, so daß für alle (X, Y) und (x, y), für die

$$(X - x')^2 + (Y - y')^2 < [\delta_1(\omega)]^2, \quad (x - x')^2 + (y - y')^2 > \omega^2$$

ist, die Beziehung

$$I(X, Y; x, y) < \omega$$

besteht. Aus der soeben angegebenen Auflösungsformel für $\mathfrak{G}(X, Y; x, y)$ ergibt sich schließlich, *daß man einen nur von* δ *abhängigen positiven Wert* $\delta_2(\omega) < \frac{\omega}{2}$ *derart bestimmen kann, daß für alle* (x, y) *und* (X, Y) *in* T *und auf* S, *welche den Bedingungen*

$$(x-x')^2+(y-y')^2>\omega^2,\quad (X-x')^2+(Y-y')^2<[\delta_2(\omega)]^2$$

genügen,

$$|\mathfrak{G}(X,Y;x,y)|<\omega. \tag{18.}$$

Es sei jetzt

$$M(u)\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+\Big(c-\frac{\partial a}{\partial x}-\frac{\partial b}{\partial y}\Big)u=0 \tag{19.}$$

die zu (6.) adjungierte Differentialgleichung. Es ist leicht zu zeigen, daß auch diese Differentialgleichung keine von Null verschiedene, in T reguläre, auf S verschwindende Lösung hat*). Es möge entgegen unserer Behauptung $\vartheta(x,y)$ eine Lösung dieser Art sein. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial\vartheta}{\partial x}$, $\frac{\partial\vartheta}{\partial y}$ sind noch auf S stetig. Setzt man jetzt in die Formel

$$\iint_T[w_2L(w_1)-w_1M(w_2)]\,dx\,dy=\int_S(R_2\,dy-R_1\,dx), \tag{20.}$$

$$R_1=\Big(w_2\frac{\partial w_1}{\partial y}-w_1\frac{\partial w_2}{\partial y}\Big)+b\,w_1w_2,$$

$$R_2=\Big(w_2\frac{\partial w_1}{\partial x}-w_1\frac{\partial w_2}{\partial x}\Big)+a\,w_1w_2$$

für w_1 und w_2 entsprechend $\mathfrak{G}(X,Y;x,y)$ und $\vartheta(x,y)$ ein, so findet man in bekannter Weise

$$\vartheta(x,y)\equiv 0.$$

Da $\vartheta(x,y)$ identisch verschwindet, so existiert die zu T gehörige *Green*sche Funktion von (19.). Sie möge mit $\mathfrak{H}(X,Y;x,y)$ bezeichnet werden. Setzt man in (20.) für w_1 und w_2 entsprechend $\mathfrak{G}(x_1,y_1;x,y)$ und $\mathfrak{H}(x_2,y_2;x,y)$ ein, unter (x_1,y_1) und (x_2,y_2) zwei voneinander verschiedene Punkte in T verstanden, so findet man die Reziprozitätsbeziehung

$$\mathfrak{G}(x_1,y_1;x_2,y_2)=\mathfrak{H}(x_2,y_2;x_1,y_1). \tag{21.}$$

---

*) Der Ausdruck $c-\frac{\partial a}{\partial x}-\frac{\partial b}{\partial y}$ ist im allgemeinen eine schlechthin stetige Funktion von x und y. Wie am Schluß des § 1 hervorgehoben worden ist, sind die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung der Lösungen von (19.) in gewissen Punktmengen vom Maße Null nicht endlich oder nicht vorhanden. Da sie aber in allen Mengen $T'-(M)$ nebst ihren Quadraten im *Lebesgue*schen Sinne integrierbar sind, so gilt die Formel (20.) und alle aus ihr zu ziehenden Folgerungen, insbesondere die Formel (29.). Will man diese Diskussion vermeiden, so kann man voraussetzen, daß $\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y}$ in T etwa der *Hölder*schen Bedingung genügt.

§ 3. Reguläre Lösungen (Fortsetzung).

Wir nehmen wie in § 2 an, daß die Differentialgleichung (5.) keine von Null verschiedene, in T reguläre, auf S verschwindende Lösung hat, und leiten aus der Formel (3.) einen wichtigen Satz ab, von dem wir weiter unten wiederholt Gebrauch machen werden.

Es sei $\varphi(s)$ eine abteilungsweise stetige Randfunktion, $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots$ eine unendliche Folge stetiger Funktionen, die in jedem die Unstetigkeitspunkte von $\varphi(s)$ nicht enthaltenden Teile von S gegen $\varphi(s)$ gleichmäßig konvergieren. Es sei ferner für alle k

$$|\varphi_k(s)| < A_3.$$

Sind nun $u(x, y), u_1(x, y), u_2(x, y) \ldots$ die beschränkten, in T regulären Lösungen der Differentialgleichung (1.), die auf S entsprechend die Werte $\varphi(s), \varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots$ annehmen, *so ist für alle* (x, y) *in* T *und auf* S, *außer in den Unstetigkeitspunkten von* $\varphi(s)$,

$$\lim_{k=\infty} u_k(x, y) = u(x, y). \tag{22.}$$

Der Grenzübergang ist in jedem die Unstetigkeitspunkte von $\varphi(s)$ *nicht enthaltenden Teile von* T *gleichmäßig**).

Es mögen $v(x, y), v_1(x, y), v_2(x, y), \ldots$ die beschränkten, in T regulären Potentialfunktionen bezeichnen, die am Rande entsprechend die Werte $\varphi(s), \varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots$ annehmen. Für alle (x, y) in T und auf S ist

$$|v_k(x, y)| < A_3. \qquad (k=1, 2, \ldots)$$

In jedem die Unstetigkeitspunkte von $\varphi(s)$ nicht enthaltenden Teilgebiete von T konvergieren die $v_k(x, y)$ gleichmäßig gegen $v(x, y)$:

$$\lim_{k=\infty} v_k(x, y) = v(x, y).$$

Die Funktion $u(x, y)$ genügt einer Integralgleichung mit stetigem Kerne, die aus der Integralgleichung (3.) durch zweimalige Iteration hervorgeht, und die wir wie folgt bezeichnen:

$$u(x, y) = \iint_T K(x, y; \xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \omega(x, y). \tag{23.}$$

Hierin ist $\omega(x, y)$ eine gewisse beschränkte, in jedem die Unstetigkeits-

---

*) Diesen Satz, der eine Verallgemeinerung eines bekannten Satzes von *Harnack* darstellt, habe ich für stetige $\varphi(s)$ auf einem anderen Wege in der eingangs zitierten Annalen-Arbeit abgeleitet (vgl. a. a. O. S. 574).

punkte von $\varphi(s)$ nicht enthaltenden Teile von T stetige Funktion. Desgleichen ist $u_k(x, y)$ die Lösung der Integralgleichung

$$(24.)\quad u_k(x,y) = \iint_T K(x,y;\xi,\eta)\, u_k(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta + \omega_k(x,y).$$

Die Funktionen $\omega_k(x, y)$, $(k = 1, 2, \ldots)$ sind in T und auf S stetig und haben folgende Eigenschaften:

Für alle k ist in T und auf S

$$(25.)\qquad |\omega_k(x,y)| < A_4.$$

In jedem die Unstetigkeitspunkte von $\varphi(s)$ nicht enthaltenden Teile von T konvergieren die $\omega_k(x, y)$ gleichmäßig gegen $\omega(x, y)$:

$$(26.)\qquad \lim_{k=\infty} \omega_k(x,y) = \omega(x,y).$$

Es ist nun, wenn wir mit $K_0(x, y; \xi, \eta)$ wieder den lösenden Kern von (23.) und (24.) bezeichnen,

$$u(x,y) = \omega(x,y) + \iint_T K_0(x,y;\xi,\eta)\,\omega(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta,$$

$$u_k(x,y) = \omega_k(x,y) + \iint_T K_0(x,y;\xi,\eta)\,\omega_k(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Hieraus und aus den Beziehungen (25.) und (26.) folgt nun, wie man leicht findet, unsere Behauptung.

Nach bekannten Sätzen kann man der abteilungsweise stetigen Randfunktion $\varphi(s)$ in unendlich mannigfaltiger Weise eine Folge analytischer Funktionen

$$(27.)\qquad \varphi^{(1)}(s),\ \varphi^{(2)}(s), \ldots$$

zuordnen, die in jedem die Unstetigkeitspunkte von $\varphi(s)$ nicht enthaltenden Teile von S gegen $\varphi(s)$ gleichmäßig konvergieren und für alle k einer Ungleichheitsbedingung

$$(28.)\qquad |\varphi^{(k)}(s)| < A_5$$

genügen. Es mögen $u^{(1)}(x, y), u^{(2)}(x, y), \ldots$ diejenigen beschränkten, in T regulären Lösungen der Differentialgleichung (1.) bezeichnen, die auf S die Werte (27.) annehmen. Setzt man in (20.) für w_1 und w_2 entsprechend $u^{(k)}(x, y)$ und $\mathfrak{H}(X, Y; x, y)$ ein, so findet man in bekannter Weise die Formel

$$(29.)\quad u^{(k)}(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\iint_T \mathfrak{H}(x,y;\xi,\eta)\, f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta + \frac{1}{2\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial n}\mathfrak{H}(x,y;s)\,\varphi^{(k)}(s)\, ds.\ ^*)$$

---

*) Vgl. *Sommerfeld*, Encyklopädie der Math. Wissenschaften, II A 7 c, S. 516.

Hierin bezeichnet das Symbol $\frac{\partial}{\partial n}$ die Ableitung in der Richtung der Innennormale, $\frac{\partial}{\partial n}\mathfrak{H}(x, y; s)$ den Wert der Normalableitung $\frac{\partial}{\partial n}\mathfrak{H}(x, y; x', y')$ in demjenigen Punkte (x', y') auf S, dem der Wert s der Bogenlänge entspricht.

Läßt man jetzt k über alle Grenzen wachsen, so erhält man mit Rücksicht auf den zuletzt bewiesenen Satz und die Beziehung (28.) *für alle (x, y) in T die Fundamentalformel*

$$(30.)\qquad u(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\iint_T \mathfrak{H}(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \frac{1}{2\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial n}\mathfrak{H}(x, y; s)\varphi(s)\, ds.$$

Sie gilt mithin für alle abteilungsweise stetigen Randfunktionen $\varphi(s)$ und, wie ich an einer anderen Stelle bewiesen habe, *auch für Gebiete, die von einer endlichen Anzahl von Stücken regulär analytischer Kurven begrenzt sind und Ecken oder einspringende Spitzen, jedoch keine nach außen gerichteten Spitzen haben.**)

§ 4. Der besondere Fall $c < 0$. Das alternierende Verfahren.

Es möge jetzt im Innern und auf dem Rande des Gebietes T, das wir als einfach zusammenhängend voraussetzen, die Beziehung $c < 0$ erfüllt sein. Nach einem bekannten Satze von *A. Paraf* kann eine in T reguläre Lösung von (5.) daselbst weder positive Maxima, noch negative Minima (selbst im weiteren Sinne) haben. Eine beschränkte, in T reguläre, auf S verschwindende Lösung muß hiernach, wie man leicht sieht, in T identisch verschwinden.

Wir nehmen auf S zwei beliebige Punkte B_1 und B_2 an und verbinden sie durch irgendeine ganz im Innern von T verlaufende, S nicht berührende stetig gekrümmte Kurve S^*. Durch die Punkte B_1 und B_2 wird die Kurve S in zwei Teile $S^{(1)}$ und $S^{(2)}$ geteilt. Es sei $\omega(x, y)$ diejenige beschränkte, in T reguläre Lösung von (5.), die auf $S^{(1)}$ den Wert 1, auf $S^{(2)}$ den Wert 0 annimmt. *Wir beweisen, daß in allen Punkten von S^**

$$(31.)\qquad |\omega(x, y)| < q.$$

Hierin bezeichnet q einen positiven echten Bruch.

Betrachten wir die Integralgleichung

---

*) Vgl. meine wiederholt erwähnte Arbeit in den Acta Math. Der an jener Stelle gegebene Beweis gilt, wenn in dem betrachteten Gebiete $c = 0$ ist, oder bei beliebigem c, wenn die von je zwei Nachbarseiten der Begrenzung eingeschlossenen Winkel $> \frac{\pi}{4}$ sind.

$$(32.)\quad \omega(x,y)=\frac{1}{2\pi}\iint_T\Big[G(x,y;\xi,\eta)\,c(\xi,\eta)-\frac{\partial}{\partial\xi}\{a(\xi,\eta)\,G(x,y;\xi,\eta)\}-\frac{\partial}{\partial\eta}\{b(\xi,\eta)\,G(x,y;\xi,\eta)\}\Big]\omega(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta+\nu(x,y),$$

in der $\nu(x,y)$ diejenige beschränkte, in T reguläre Potentialfunktion bezeichnet, die auf $S^{(1)}$ den Wert 1, auf $S^{(2)}$ den Wert 0 annimmt. Das Doppelintegral rechterhand konvergiert, wenn (x,y) sich auf S^* der Kurve S nähert, gegen Null. Man kann daher nach Festsetzung einer beliebig kleinen positiven Zahl ε auf S^* zwei Punkte B_3 und B_4 so annehmen, daß für alle (x,y) auf B_1B_3 und B_2B_4 der absolute Betrag jenes Doppelintegrals den Wert ε nicht übersteigt. Nach einem fundamentalen Hilfssatze von Herrn *H. A. Schwarz* ist ferner für alle (x,y) auf S^*

$$(33.)\qquad |\nu(x,y)|<q_1<1.$$

Nehmen wir jetzt etwa $\varepsilon<\frac{1-q_1}{2}$ an, so finden wir für alle (x,y) auf B_1B_3 und B_2B_4

$$|\omega(x,y)|<q_1+\varepsilon<1-\frac{1-q_1}{2}.$$

Es sei jetzt m die obere Grenze von $\omega(x,y)$ in T und auf S. Es sei ferner $(\xi_1,\eta_1),(\xi_2,\eta_2),\ldots$ irgendeine unendliche Folge von Punkten in diesem Gebiete, die so gewählt ist, daß

$$\lim_{n=\infty}\omega(\xi_n,\eta_n)=m.$$

Die Häufungspunkte der Folge können nach dem Satze von *Paraf* nur auf S liegen. Ist erstens ein Häufungspunkt vorhanden, der von B_1 und B_2 verschieden ist, so ist offenbar $m=1$. Es möge nunmehr zweitens etwa $B_1(x_1,y_1)$ der einzige Häufungspunkt der Folge sein. Jeder noch so kleinen positiven Zahl ε_1 läßt sich alsdann eine andere positive Zahl δ_1 zuordnen, so daß für alle (ξ_k,η_k) in dem Kreise um B_1 vom Radius δ_1

$$m\geqq\omega(\xi_k,\eta_k)\geqq m-\varepsilon_1$$

wird. Bezeichnen wir vorübergehend das Doppelintegral in (32.) mit $I(x,y)$. Man kann eine positive Zahl $\delta_2\leqq\delta_1$ so bestimmen, daß für alle (ξ_k,η_k) in der Kreisfläche um B_1 vom Radius δ_2

$$|I(\xi_k,\eta_k)|<\varepsilon_1$$

wird. Da $\nu(x,y)\leqq 1$ ist, so ist nach (32.)

$$|\omega(\xi_k, \eta_k)| < 1 + \varepsilon_1,$$
$$m - \varepsilon_1 < 1 + \varepsilon_1,$$
$$m < 1 + 2\varepsilon_1.$$

Hieraus folgt, da m gewiß nicht < 1 sein kann, wieder

$$m = 1.$$

Für alle (x, y) auf dem Bogen $B_3 B_4$ der Kurve S^* ist dem Satze von *Paraf* gemäß nunmehr gewiß

$$|\omega(x, y)| < 1,$$

somit auch

$$|\omega(x, y)| < q_2 < 1.$$

Wählt man also q gleich der größeren der beiden Zahlen q_2 und $1 - \frac{1 - q_1}{2}$, so findet man, wie behauptet, für alle (x, y) auf S^*

$$|\omega(x, y)| < q < 1^*).$$

Die Ungleichheitsbedingung (31.) ist der Beziehung (33.) der Potentialtheorie ganz analog. Sie gestattet das alternierende Verfahren von Herrn *H. A. Schwarz* auf die Differentialgleichung (5.) in dem hier betrachteten besonderen Falle $c < 0$ auszudehnen. Es ergibt sich so die Möglichkeit, die erste Randwertaufgabe für einfach oder mehrfach zusammenhängende Gebiete aufzulösen, deren Randkurven abteilungsweise stetige Tangente und Krümmung haben und Ecken sowie einspringende Spitzen, jedoch keine nach außen gerichteten Spitzen besitzen. Wir gehen auf diesen Gegenstand jetzt nicht näher ein, weil wir im zweiten Kapitel die erste Randwertaufgabe ohnedies für Gebiete erledigen werden, die noch wesentlich allgemeinerer Natur sind.

Bevor wir diesen Abschnitt verlassen, wollen wir die erste Randwertaufgabe der Differentialgleichung (1.) für einen besonderen Bereich auflösen. Das fragliche Gebiet R ist eine Kreisfläche um den Koordinatenursprung, die längs der positiven Abszissenachse mit einem Einschnitt versehen ist. An der Kreisperipherie sind die beiden Ränder des Einschnittes so abgerundet, daß die Randkurve, außer im Koordinatenursprung, wo sie eine Spitze hat, überall stetig gekrümmt ist.

---

*) Diesen Satz habe ich zuerst auf einem anderen Wege abgeleitet und in der Note: Zur Theorie der part. Differentialgl. $D(u) \equiv \Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0,\ c < 0$, Monatshefte für Mathematik und Physik, 1910, S. 172—177 veröffentlicht.

Wir führen durch die Gleichung

$$x_1 + iy_1 = (x + iy)^{\frac{1}{2}}$$

neue Veränderliche ein. Unter $(x + iy)^{\frac{1}{2}}$ wird hierbei derjenige in R reguläre Zweig der Funktion $e^{\frac{1}{2}\log(x+iy)}$ verstanden, der die negative Hälfte der Abszissenachse in die positive Hälfte der Ordinatenachse transformiert. In der Ebene (x_1, y_1) entspricht unserem Gebiete ein von einer stetig gekrümmten Kurve σ_1 begrenztes Gebiet R_1. Setzt man

$$u(x, y) = u_1(x_1, y_1),$$

so findet man für $u_1(x_1, y_1)$ eine Differentialgleichung von der Form

$$L_1(u_1) \equiv \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2} + a_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + b_1 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + c_1 u_1 = f_1.$$

Die Koeffizienten a_1, b_1, c_1, f_1 erfüllen, wie man sich leicht überzeugt, in R_1 und auf σ_1 die in § 1 angegebenen Bedingungen. Da die Werte von $u_1(x_1, y_1)$ auf σ_1 abteilungsweise stetig sind, so ist die erste Randwertaufgabe der Differentialgleichung $L_1(u_1) = f_1$ in R_1 und somit auch das vorgelegte spezielle Randwertproblem als gelöst zu betrachten.

Es möge die Differentialgleichung $L_1(u_1) = 0$, außer der Null, keine in R_1 reguläre, auf σ_1 verschwindende Lösung haben. Alsdann existiert die zu R_1 gehörige *Green*sche Funktion von $L_1(u_1) = 0$. Wir bezeichnen sie mit $\mathfrak{G}_1(X_1, Y_1; x_1, y_1)$ und setzen

$$\mathfrak{G}_1(X_1, Y_1; x_1, y_1) = \mathfrak{G}(X, Y; x, y).$$

Hierin bezeichnet (X, Y) denjenigen Punkt der ursprünglichen Ebene, dem der Punkt (X_1, Y_1) der neuen Ebene entspricht. Die Funktion $\mathfrak{G}$ ist, wie man leicht sieht, die zu dem ursprünglichen Gebiete gehörige *Green*sche Funktion der Differentialgleichung (5.). Offenbar konvergiert $\mathfrak{G}$ bei der Annäherung von (x, y) an den Rand gegen Null gleichmäßig.

Die am Schluß des zweiten Paragraphen für Gebiete mit stetig gekrümmter Berandung bewiesene Eigenschaft (18.) der *Green*schen Funktion gilt, wie man sich sofort überzeugt, auch für das soeben betrachtete spezielle Gebiet.

II. Kapitel. Die elliptischen Differentialgleichungen in der Normalform. Allgemeine Gebiete.

§ 1. Der besondere Fall $c < 0$. Die am Rande verschwindende *Green*sche Funktion.

Den zunächst folgenden Betrachtungen legen wir ein beliebiges endliches Gebiet T, das von einer geschlossenen, stetigen, doppelpunktlosen (*Jordan*schen) Kurve S begrenzt ist, zugrunde*). Wir werden später über den Charakter der Kurve S einige weitere einschränkende Voraussetzungen machen.

Wir nehmen an, daß die Koeffizienten a, b, c in einem Gebiete T^* erklärt sind, welches T ganz in seinem Innern enthält, und daß sie daselbst die in I, § 1 auseinandergesetzten Eigenschaften haben. Zur Vereinfachung wird ferner festgesetzt, daß der Ausdruck $\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}$ in T^* der *Hölder*schen Bedingung genügt. Es sei $S_1, S_2, S_3, \ldots$ eine unendliche Folge geschlossener, doppelpunktloser, stetig gekrümmter Kurven in T und es mögen $T_1, T_2, T_3, \ldots$ die von ihnen begrenzten endlichen Gebiete bezeichnen. Wir setzen voraus, daß S_k für alle k in T_{k+1} enthalten ist und daß für $k = \infty$ der Höchstwert der Entfernung der Punkte der Kurve S_k von S gegen Null konvergiert**). Es sei schließlich T^0 irgendein einfach zusammenhängendes, von einer stetig gekrümmten Kurve S^0 begrenztes Gebiet in T^*, das T ganz in seinem Innern enthält, und (X, Y) irgendein Punkt in T. Wir nehmen, was gewiß zulässig ist, an, daß (X, Y) im Innern von T_1 liegt, und bezeichnen die zu T_k und T^0 gehörigen *Green*schen Funktionen der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0, \quad c < 0 \tag{34.}$$

entsprechend mit

$$\mathfrak{G}_k(X, Y; x, y), \quad \mathfrak{G}^0(X, Y; x, y).$$

---

*) Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf die Betrachtung eines einfach zusammenhängenden Gebietes. Die Überlegungen dieses Kapitels gelten indessen im wesentlichen unverändert auch für mehrfach zusammenhängende Gebiete.

**) Die Idee, ein Gebiet von komplizierter Berandung durch eine Folge von Gebieten mit einfacher gestalteten Randkurven zu approximieren, geht meines Wissens auf Herrn *H. A. Schwarz* zurück. Vgl. seine fundamentale Arbeit: Zur Theorie der Abbildung, Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Bd. II S. 108—132.

Da diese Funktionen in der Umgebung von (X, Y) positiv sind und entsprechend auf S_k und S^0 verschwinden, so sind sie nach dem Satze von *Paraf* in T_k und T^0 gewiß nicht negativ. Es ist ferner für alle (x, y) auf S_ν und daher auch in T_ν

$$\mathfrak{G}_\nu(X, Y; x, y) \leqq \mathfrak{G}^0(X, Y; x, y). \qquad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{35.}$$

Betrachten wir die unendliche Reihe

$$\sum_{\nu=k}^{\infty} (\mathfrak{G}_{\nu+1} - \mathfrak{G}_\nu). \tag{36.}$$

Ihre Glieder sind in T_k reguläre*), nicht negative Lösungen der Differentialgleichung (34.). Die unendliche Reihe (36.) konvergiert in T_k und auf S_k, da die Summe ihrer p ersten Glieder

$$\omega_p(x, y) = \mathfrak{G}_{k+p}(X, Y; x, y) - \mathfrak{G}_k(X, Y; x, y)$$

daselbst für alle p der Ungleichheit

$$\omega_p(x, y) \leqq \mathfrak{G}^0(X, Y; x, y) - \mathfrak{G}_k(X, Y; x, y)$$

genügt. Wir setzen

$$\mu = \text{Max.} \, |\mathfrak{G}^0 - \mathfrak{G}_k|$$

für alle (x, y) in T_k und auf S_k.

Die Reihe (36.) *konvergiert*, wie wir jetzt zeigen wollen, *in jedem ganz im Innern von T_k enthaltenen Gebiete gleichmäßig.*

Es sei $\mathfrak{H}_k$ die zu T_k gehörige *Green*sche Funktion der zu (34.) adjungierten Differentialgleichung. Wir setzen zur Vereinfachung

$$\sum_{\nu=k}^{\infty} (\mathfrak{G}_{\nu+1} - \mathfrak{G}_\nu) = \Omega_k(x, y).$$

Nach (30.) erhält man, wenn man den Wert von $\omega_p(x, y)$ auf S_k mit $\omega_p(s)$ bezeichnet, für alle (x, y) im Innern von T_k

$$\omega_p(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{S_k} \frac{\partial}{\partial n} \mathfrak{H}_k(x, y; s)\, \omega_p(s)\, ds,$$

somit, wenn (x', y') einen beliebigen Punkt in T_k in der Umgebung von (x, y) bezeichnet,

$$\omega_p(x', y') - \omega_p(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{S_k} \left[\frac{\partial}{\partial n} \mathfrak{H}_k(x, y; s) - \frac{\partial}{\partial n} \mathfrak{H}_k(x', y'; s) \right] \omega_p(s)\, ds.$$

---

*) Von der Differenz $\mathfrak{G}_{\nu+1} - \mathfrak{G}_\nu$ weiß man zunächst nur, daß sie in T, außer höchstens in (X, Y), regulär ist. In (X, Y) ist die Funktion $\mathfrak{G}_{\nu+1} - \mathfrak{G}_\nu$ gewiß noch stetig, während ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung daselbst höchstens logarithmisch unendlich werden können. Nunmehr kann man, gestützt auf die Formel (20.), leicht zeigen, daß $\mathfrak{G}_{\nu+1} - \mathfrak{G}_\nu$ in T durchaus regulär ist.

Da auf S_k

$$|\omega_p(s)| \leqq \mu$$

ist, so ist

$$|\omega_p(x', y') - \omega_p(x, y)| \leqq \frac{1}{2\pi} \int_{S_k} \left| \frac{\partial}{\partial n} \mathfrak{H}_k(x, y; s) - \frac{\partial}{\partial n} \mathfrak{H}_k(x', y'; s) \right| \mu \, ds,$$

daher auch

$$|\Omega_k(x', y') - \Omega_k(x, y)| \leqq \frac{1}{2\pi} \int_{S_k} \left| \frac{\partial}{\partial n} \mathfrak{H}_k(x, y; s) - \frac{\partial}{\partial n} \mathfrak{H}_k(x', y'; s) \right| \mu \, ds.$$

Das Integral rechterhand verschwindet mit $(x' - x)^2 + (y' - y)^2$. Die Summe der unendlichen Reihe (36.) ist somit im Innern von T_k stetig. Ihre Glieder sind stetige, nicht negative Funktionen. Nach einem bekannten Satze von Herrn *Dini* konvergiert (36.) in jedem ganz im Innern von T_k gelegenen Gebiete gleichmäßig. Dem in I, § 3 bewiesenen Satze zufolge ist daher $\Omega_k(x, y)$ eine im Innern von T_k reguläre Lösung der Differentialgleichung (34.).

Betrachten wir jetzt die unendliche Reihe

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (\mathfrak{G}_{\nu+1} - \mathfrak{G}_\nu). \tag{37.}$$

Die Funktion $\mathfrak{G}$ ist offenbar eine in T, außer im Punkte (X, Y), reguläre Lösung der Differentialgleichung (5.). *In der Umgebung von (X, Y) werden $\mathfrak{G}$, $\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x}$ und $\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial y}$ entsprechend wie $\mathfrak{G}_1$, $\frac{\partial \mathfrak{G}_1}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathfrak{G}_1}{\partial y}$ unendlich.*

Wir wenden uns jetzt der Betrachtung der Werte von $\mathfrak{G}$ auf dem Rande des Gebietes zu und setzen zunächst voraus, daß es möglich ist, jeden Punkt von S mit einem Punkte von S^0 durch eine stetig gekrümmte, doppelpunktlose Kurve zu verbinden, die möglicherweise Punkte oder zusammenhängende Stücke mit S gemeinsam hat, jedoch keinen im Innern von T befindlichen Punkt enthält.

Es sei P ein beliebiger Punkt auf S. Wir verbinden P mit irgendeinem Punkte von S^0 durch eine stetig gekrümmte, doppelpunktlose Kurve, die keinen im Innern von T gelegenen Punkt enthält. Längs dieser Kurve denken wir uns jetzt T^0 aufgeschnitten und die beiden Ränder des Einschnittes in der Nähe von S^0 so abgerundet, daß die Randkurve σ^0 des zerschnittenen Gebietes, das wir mit R^0 bezeichnen, außer in P, wo sie eine Spitze hat, überall stetig gekrümmt ist.

Es sei $\tilde{\mathfrak{G}}(X, Y; x, y)$ die zu R^0 gehörige *Green*sche Funktion von (5.). Die Existenz dieser Funktion steht nach den Betrachtungen am Schluß des ersten Kapitels fest*).

In allen Punkten (x, y) von S_ν ist

$$\mathfrak{G}_\nu(X, Y; x, y) \leqq \tilde{\mathfrak{G}}(X, Y; x, y). \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

Diese Beziehung gilt nach dem Satze von *Paraf* für alle (x, y) in T_ν und auf S_ν. Da T_k in allen T_{k+i} enthalten ist, so ist in T_k für alle i

$$\mathfrak{G}_{k+i}(X, Y; x, y) \leqq \tilde{\mathfrak{G}}(X, Y; x, y).$$

In der Grenze folgt hieraus für alle (x, y) in T_k

$$\mathfrak{G}(X, Y; x, y) \leqq \tilde{\mathfrak{G}}(X, Y; x, y). \qquad (38.)$$

Da k beliebig ist, so gilt diese Beziehung für alle (x, y) in T. Da nun $\tilde{\mathfrak{G}}$ in P verschwindet, so wird auch die nicht negative Funktion $\mathfrak{G}(X, Y; x, y)$ im Punkte P gleich Null**).

Die durch (37.) *definierte Funktion* $\mathfrak{G}(X, Y; x, y)$ *ist die zu dem Gebiete* T *gehörige, auf* S *verschwindende Greensche Funktion der Differentialgleichung* (34.).

Wir wenden jetzt dieses Resultat auf ein spezielles Gebiet an. In der Ebene der Variablen x und y sei eine Kreisfläche um den Koordinatenursprung gegeben. Ihren Mittelpunkt denken wir uns mit der Peripherie durch einen Linienzug verbunden, der aus einer endlichen Anzahl Stücke von Kurven mit stetiger Tangente besteht und den Kreis nicht berührt; die von den aufeinanderfolgenden Kurvenstücken gebildeten Winkel

---

*) An jener Stelle haben wir spezieller eine mit einem zum Teil geradlinigen Einschnitt versehene Kreisfläche behandelt. Die Ergebnisse gelten ohne Änderung für den jetzt betrachteten allgemeineren Fall. Man überzeugt sich nämlich, daß das Gebiet, in welches R^0 durch die am Schluß des ersten Kapitels gebrauchte Transformation $x_1 + iy_1 = (x + iy)^{\frac{1}{2}}$ verwandelt wird, von einer durchaus stetig gekrümmten Kurve begrenzt ist. In dem Punkte, dem die Spitze entspricht, ist die Krümmung gleich Null.

**) Dies ist so zu verstehen: Jeder noch so kleinen positiven Zahl ε kann man eine Zahl ϑ zuordnen, so daß in allen Punkten in T, deren Entfernung von P kleiner als ϑ ist, $\mathfrak{G}(X, Y; x, y) < \varepsilon$. Gibt man für alle (x, y) auf S der Funktion $\mathfrak{G}(X, Y; x, y)$ den Wert Null, so kann man auch sagen: in allen Punkten in T und auf S, deren Entfernung von P den Wert δ nicht übersteigt, ist $\mathfrak{G} < \varepsilon$. Offenbar nähert sich $\mathfrak{G}$ dem Werte Null auf dem ganzen Rande von T gleichmäßig.

werden als von Null und 2π verschieden vorausgesetzt. Wie sich leicht zeigen läßt, ist durch die vorstehenden Betrachtungen die Existenz der *Green*schen Funktion der Differentialgleichung (34.) für das Gebiet R', das man erhält, wenn man die Kreisfläche längs unseres Linienzuges aufschneidet, als erwiesen zu betrachten. Führt man nämlich, wie am Schluß des ersten Kapitels, durch die Gleichung $x_1 + iy_1 = (x + iy)^{\frac{1}{2}}$ neue Veränderliche ein, so geht R' in ein neues Gebiet R'' über, das von einer Kurve mit abteilungsweise stetiger Tangente begrenzt ist und keine Spitzen hat. Im Koordinatenursprung hat die Randkurve eine stetige Tangente. Die Begrenzung des Gebietes R'' genügt allen Bedingungen, die wir vorhin der Kurve S auferlegt haben. Die Existenz der zu R'' gehörigen *Green*schen Funktion der transformierten Differentialgleichung, somit der zu R' gehörigen *Green*schen Funktion von (34.) ist also bewiesen.

Man kann nun die in diesem Paragraphen durchgeführten Betrachtungen wiederholen, indem man für R^0 ein Gebiet nach Art des Gebietes R' wählt. *Es läßt sich so die Existenz der Greenschen Funktion der Differentialgleichung* (34.) *für alle Gebiete dartun, deren Randkurve S so beschaffen ist, daß jeder ihrer Punkte mit einem Punkte von S^0 durch einen Linienzug von der soeben betrachteten Natur verbunden werden kann, einen Linienzug, der möglicherweise Punkte oder zusammenhängende Stücke mit S gemeinsam hat, jedoch keinen in T befindlichen Punkt enthält. Insbesondere gilt dies für alle Gebiete, deren Begrenzung aus einer endlichen Anzahl Stücke von Kurven mit stetiger Tangente besteht, die beliebige Ecken oder Spitzen miteinander einschließen.*

Es sei z. B. P der Scheitel einer Spitze von S, P_1 ein Punkt auf einem der beiden in P zusammentreffenden Kurvenstücke, P_2 ein Punkt auf der Außennormale in P_1 so nahe an P_1, daß P_1P_2 keinen Punkt von S enthält, Q ein Punkt auf S^0 und P_2Q irgendeine P_1P_2 und S^0 nicht berührende Kurve mit stetiger Tangente außerhalb T. Der Linienzug PP_1P_2Q genügt allen von uns vorgeschriebenen Bedingungen.

Es ist leicht zu zeigen, daß das Problem der Bestimmung der *Green*schen Funktion von (34.) nur eine Lösung hat. Es sei etwa $\mathfrak{G}^*(X, Y; x, y)$ irgendeine auf S verschwindende, in (X, Y) wie $\mathfrak{G}(X, Y; x, y)$ unstetige Lösung von (34.). Die Differenz $\mathfrak{G}_* = \mathfrak{G} - \mathfrak{G}^*$ erfüllt in T die Differentialgleichung (34.), verschwindet auf S und ist in T durchaus stetig. Die partiellen

Ableitungen $\frac{\partial \mathfrak{G}_*}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathfrak{G}_*}{\partial y}$ werden in (X, Y) höchstens logarithmisch unendlich. Es läßt sich nun mit Hilfe der Beziehung (20.) leicht zeigen, daß $\frac{\partial \mathfrak{G}_*}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathfrak{G}_*}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 \mathfrak{G}_*}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \mathfrak{G}_*}{\partial y^2}$ in T durchaus stetig sind*). Nach dem Satze von *Paraf* ist daher

$$\mathfrak{G}_* \equiv 0.$$

Aus (35.) ergibt sich durch den Übergang zur Grenze die wichtige Beziehung

$$(39.) \qquad \mathfrak{G}(X, Y; x, y) < \mathfrak{G}^0(X, Y; x, y) < \left|\log \frac{1}{r}\right| + A_6,$$
$$r^2 = (X-x)^2 + (Y-y)^2.$$

§ 2. Der besondere Fall $c < 0$, $c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} \leqq 0$. Das erste Randwertproblem.

Wir machen in diesem Paragraphen die Voraussetzung, daß in allen Punkten von T^*

$$c < 0, \quad c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} < 0.$$

Es seien $\mathfrak{H}_k(X, Y; x, y)$ und $\mathfrak{H}(X, Y; x, y)$ die zu T_k und T gehörigen *Green*schen Funktionen der zu (34.) adjungierten Differentialgleichung

$$(40.) \quad M(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - a\frac{\partial u}{\partial x} - b\frac{\partial u}{\partial y} + \left(c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y}\right) u = 0.$$

Die Existenz dieser Funktionen steht nach den Ergebnissen des vorhergehenden Paragraphen fest. Für alle Paare voneinander verschiedener Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) in T_k ist

$$\mathfrak{H}_{k+i}(x_1, y_1; x_2, y_2) = \mathfrak{G}_{k+i}(x_2, y_2; x_1, y_1). \qquad (i = 0, 1, \ldots)$$

In der Grenze folgt hieraus

$$\mathfrak{H}(x_1, y_1; x_2, y_2) = \mathfrak{G}(x_2, y_2; x_1, y_1).$$

Da k beliebig ist, so gilt diese Beziehung für alle nicht zusammenfallenden (x_1, y_1), (x_2, y_2) in T. Es besteht ferner, sofern nicht gleichzeitig $x = X$, $y = Y$, die zu (39.) analoge Relation

$$(41.) \qquad \mathfrak{H}(X, Y; x, y) < \left|\log \frac{1}{r}\right| + A_7.$$

Wir nehmen jetzt vorübergehend an, daß jeder Punkt von S mit einem Punkte von S^0 durch eine doppelpunktlose, stetig gekrümmte Kurve, die

*) Vgl. die Fußnote auf S. 21.

keinen in T gelegenen Punkt enthält, verbunden werden kann. Es sei R^0 das zu dem Punkte P von S gehörige, von der mit einer Spitze in P versehenen Kurve σ^0 begrenzte Gebiet, das in dem vorhergehenden Paragraphen eingeführt worden war. Es sei ferner ω eine beliebig kleine positive Zahl. Den Entwicklungen von I, § 2 gemäß (vgl. die Bemerkung am Schluß des ersten Kapitels und die Fußnote*) auf der Seite 23), läßt sich eine positive nur von ω abhängige Zahl $\delta_3(\omega) < \frac{\omega}{2}$ angeben, so daß für alle (X, Y) in R^0, deren Entfernung von P den Wert $\delta_3(\omega)$ nicht übersteigt, und für alle (x, y) in R^0, die um mehr als ω von P entfernt sind,

$$\tilde{\mathfrak{G}}(X, Y; x, y) < \omega.$$

Hieraus und aus (38.) folgt, daß für alle (X, Y) in T, die von P um nicht mehr als $\delta_3(\omega)$ entfernt sind, und für alle (x, y) in T, deren Entfernung von P größer ist als ω,

$$\mathfrak{G}(X, Y; x, y) < \omega. \tag{42.}$$

Diese Beziehung gilt insbesondere für Gebiete nach Art des am Schluß des vorhergehenden Paragraphen eingeführten Gebietes R'*).

Man findet nunmehr leicht, wenn man die ganze soeben durchgeführte Betrachtung wiederholt, daß die Beziehung (42.) für alle Gebiete gilt, deren Begrenzung die am Schluß des § 1 angegebenen Eigenschaften hat.

Wir nehmen nun an, das Gebiet T sei quadrierbar**).

Es sei jetzt $f(x, y)$ eine in T* erklärte, stetige, in T der *Hölder*schen Bedingung genügende Funktion***). Betrachten wir das Integral

$$V(X, Y) = -\frac{1}{2\pi} \iint_T \mathfrak{H}(X, Y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{43.}$$

Dieser Ausdruck hat der Beziehung (41.) zufolge sicher für alle (X, Y) im Innern von T eine bestimmte Bedeutung. *Bei der Annäherung an S geht $V(X, Y)$ gleichmäßig in Null über.*

---

*) Eine Kreisfläche mit einem Einschnitt, der aus einer endlichen Anzahl Stücke von Kurven mit stetiger Tangente besteht und keine Spitzen hat.

**) Möglicherweise folgt dies bereits aus den über die Kurve S vorhin gemachten Annahmen.

***) Es genügt übrigens vorauszusetzen, daß $f(x, y)$ in T und auf S beschränkt ist und in T der *Hölder*schen Bedingung genügt.

Wie wir soeben gesehen haben, läßt sich eine positive Zahl $\delta'(\omega) < \frac{\omega}{2}$ angeben, so daß für alle (X, Y) in T, deren Entfernung von P den Wert $\delta'(\omega)$ nicht übersteigt, und alle (x, y) in T, deren Entfernung von P größer ist als ω, die Beziehung

$$\mathfrak{H}(X, Y; x, y) < \omega$$

besteht. Wir beschreiben um P zwei Kreise vom Halbmesser ω und $\delta'(\omega)$ und bezeichnen die Flächenstücke, welche die Kreisflächen mit T gemeinsam haben, entsprechend mit K_1 und K_2. Es sei τ^* der Flächeninhalt von T. Für alle (X, Y) in K_2 ist

$$(44.) \qquad \iint\limits_{T-K_1} \mathfrak{H}(X, Y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta < \omega \tau^* \operatorname{Max.} |f(x, y)|$$

und

$$(45.) \iint\limits_{K_1} \mathfrak{H}(X, Y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta < \operatorname{Max.} |f(x, y)| \iint\limits_{K_1} \left[\left| \log \frac{1}{\varrho} \right| + A_7 \right] d\xi\, d\eta,$$

$$\varrho^2 = (X-\xi)^2 + (Y-\eta)^2.$$

Die beiden Ausdrücke (44.) und (45.) werden mit ω zugleich Null. Es ist daher leicht einzusehen, daß $V(X, Y)$ bei der Annäherung an den Rand gegen Null *gleichmäßig* konvergiert.

Wir beweisen jetzt, daß das Integral (43.) *für alle* (X, Y) *im Innern von* T *stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung hat und der Differentialgleichung*

$$(46.) \qquad L(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = f$$

genügt.

Es sei

$$(47.) \quad V_{k+i}(X, Y) = -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{T_{k+i}} \mathfrak{H}_{k+i}(X, Y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

diejenige in T_{k+i} reguläre Lösung der Differentialgleichung (46.), die auf S_{k+i} verschwindet. Für alle (X, Y) in T_k und auf S_k konvergiert $V_{k+i}(X, Y)$, wie sich leicht zeigen läßt, mit unbegrenzt wachsendem i gleichmäßig gegen $V(X, Y)$. Es mögen jetzt $\psi_{k+i}(s)$ und $\psi(s)$ die Werte von $V_{k+i}(X, Y)$ und $V(X, Y)$ auf S_k bezeichnen, und es sei $\overline{V}(X, Y)$ diejenige in T_k reguläre Lösung der Differentialgleichung (46.), die auf S_k die Werte $\psi(s)$ annimmt. Da $\psi_{k+i}(s)$ für $i = \infty$ gleichmäßig gegen $\psi(s)$ konvergiert, so konvergiert $V_{k+i}(X, Y)$ nach dem in I, § 3 bewiesenen Satze in T_k und auf S_k gleichmäßig gegen $\overline{V}(X, Y)$:

$$\lim_{i=\infty} V_{k+i}(X, Y) = \bar{V}(X, Y).$$

Offenbar ist daher in T_k

$$\bar{V}(X, Y) = V(X, Y).$$

Die Funktion $V(X, Y)$ ist also eine in T_k und, da k beliebig ist, überhaupt in T reguläre Lösung von (46.).

Nunmehr sind wir in der Lage, *diejenige beschränkte, in T reguläre Lösung der Differentialgleichung* (46.) *zu bestimmen, die auf S eine willkürlich vorgeschriebene, abteilungsweise stetige Folge von Werten annimmt.*

Die Gleichungen der Kurve S seien etwa in der Form

$$x = x(t),\ y = y(t) \qquad \{x(t + 2\pi) = x(t),\ y(t + 2\pi) = y(t)\},$$

gegeben. Es sei $\varphi(t)$ die vorgeschriebene Randfunktion, die wir zunächst als durchaus stetig voraussetzen. Natürlich ist $\varphi(t + 2\pi) = \varphi(t)$. Man kann gewiß eine in T^0 stetige Funktion $F(x, y)$ angeben, die auf S die Werte $\varphi(t)$ annimmt*). Nach einem Fundamentalsatze von *Weierstraß* kann man $F(x, y)$ in unendlich mannigfaltiger Weise in eine gleichmäßig konvergente Reihe von Polynomen entwickeln. Wir setzen dementsprechend

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(x, y) \tag{48.}$$

und bestimmen die Polynome P_k so, daß

$$|P_1| < \delta_1,\ 0 \leqq P_k < \delta_k \qquad (k=2, 3, \ldots)$$

und daß die unendliche Reihe

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \cdots$$

konvergiert.

Es ist nicht schwer, diejenige in T reguläre Lösung $u_k(x, y)$ der Differentialgleichung (34.) zu bestimmen, die auf S die Werte $P_k(x, y)$ annimmt. Man setze

$$u_k(x, y) = P_k(x, y) + v_k(x, y).$$

Die Funktion $v_k(x, y)$ soll in T die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 v_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_k}{\partial y^2} + a\frac{\partial v_k}{\partial x} + b\frac{\partial v_k}{\partial y} + c v_k = -L(P_k(x, y))$$

erfüllen und auf S verschwinden. Offenbar ist

$$v_k(x, y) = \frac{1}{2\pi}\iint_T L(P_k(\xi, \eta))\,\mathfrak{H}(x, y; \xi, \eta)\,d\xi\,d\eta,$$

somit

*) Vgl. *Lebesgue*, Sur le problème de *Dirichlet*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1907, insb. pg. 379—380.

$$u_k(x, y) = P_k(x, y) + \frac{1}{2\pi} \iint_T L(P_k(\xi, \eta)) \mathfrak{H}(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Für alle (x, y) auf S und alle $k > 1$ ist

$$0 \leqq u_k(x, y) < \delta_k.$$

Nach dem Satze von *Paraf* gilt diese Ungleichheitsbedingung für alle (x, y) in T und auf S. Die unendliche Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, y)$$

konvergiert für alle (x, y) in T und auf S gleichmäßig. Sie ist daher diejenige in T reguläre Lösung der Differentialgleichung $L(u) = 0$, die auf S stetig in

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k(x, y) = F(x, y)$$

übergeht. *Die Funktion*

$$(49.) \qquad -\frac{1}{2\pi} \iint_T \mathfrak{H}(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi\, d\eta + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, y)$$

ist daher die gesuchte Lösung der Differentialgleichung (46.). Aus unseren Betrachtungen folgt, wie man sich leicht überzeugt, daß die Lösung (49.) sich den vorgeschriebenen Werten auf dem ganzen Rande von T *gleichmäßig* nähert.

Es möge jetzt die vorgeschriebene Randfunktion $\varphi(t)$ abteilungsweise stetig sein. Alsdann kann man eine unendliche Folge stetiger periodischer Funktionen $R_k(t)$ auf S angeben, die folgende Eigenschaften haben:

Für alle k und alle t ist

$$|R_k(t)| < A_8.$$

In jedem die Unstetigkeitspunkte nicht enthaltenden Teile von S konvergiert $R_k(t)$ gleichmäßig gegen $\varphi(t)$. Schließlich ist durchweg

$$R_1(t) < R_2(t) < R_3(t) < \cdots.$$

Es sei $u^{(k)}(x, y)$ diejenige in T reguläre Lösung der Differentialgleichung $L(u) = 0$, die auf S die Werte $R_k(t)$ annimmt. Offenbar ist in allen Punkten in T und auf S

$$(50.) \quad u^{(1)}(x, y) \leqq u^{(2)}(x, y) \leqq u^{(3)}(x, y) \leqq \cdots, \quad |u^{(k)}(x, y)| < A_8.$$

Die Folge (50.) konvergiert gegen eine Grenzfunktion $u'(x, y)$. Ganz wie bei der analogen Betrachtung in II, § 1 kann man nacheinander zeigen, daß $u'(x, y)$ in T stetig ist, die Funktionen $u^{(k)}(x, y)$ in jedem ganz im

Innern von T gelegenen Gebiete gleichmäßig konvergieren, und schließlich, daß $u'(x, y)$ eine in T reguläre Lösung der Differentialgleichung $L(u) = 0$ ist.

Nun die Randwerte. Es sei P ein Punkt auf S, in dem $\varphi(t)$ sich stetig verhält, $R^{(1)}(t)$ eine auf S stetige Funktion, die in einer gewissen Umgebung von P mit $\varphi(t)$ übereinstimmt, sonst $> \varphi(t)$ ist, $R^{(2)}(t)$ eine stetige Funktion, die in einer gewissen Umgebung von P gleich $\varphi(t) - \alpha$, sonst $< \varphi(t) - \alpha$, in der Umgebung jeder Sprungstelle kleiner als $R_1(t) - \alpha$ ist. Hierin bezeichnet α eine beliebig kleine positive Zahlgröße. Es mögen schließlich $w^{(1)}(x, y)$ und $w^{(2)}(x, y)$ diejenigen in T regulären Lösungen der Differentialgleichung $L(u) = 0$ bezeichnen, die auf S entsprechend die Werte $R^{(1)}(t)$ und $R^{(2)}(t)$ erhalten. Nach dem Satze von *Paraf* ist in T und auf S für alle hinreichend großen Werte von k

$$w^{(2)}(x, y) \leqq u^{(k)}(x, y) \leqq w^{(1)}(x, y),$$

woraus sich durch den Übergang zur Grenze für alle (x, y) in T

$$w^{(2)}(x, y) \leqq u'(x, y) \leqq w^{(1)}(x, y)$$

ergibt. Erteilt man der Funktion $u'(x, y)$ auf S in der Umgebung von P den Wert $\varphi(t)$, so gilt die zuletzt hingeschriebene Beziehung gewiß für alle (x, y) in T *und auf* S in einer gewissen Umgebung von P. Die obere Unbestimmtheitsgrenze von $u'(x, y)$ in P ist offenbar $\leqq \varphi(t)$, die untere $\geqq \varphi(t) - \alpha$. Da aber α beliebig ist, so geht $u'(x, y)$ bei der Annäherung an P stetig in den Wert $\varphi(t)$ über. *Die Funktion*

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \iint_T \mathfrak{H}(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \lim_{k=\infty} u^{(k)}(x, y)$$

ist eine beschränkte, in T reguläre Lösung der Differentialgleichung (46.), *die auf S die Werte $\varphi(t)$ annimmt.* Offenbar konvergiert $u(x, y)$ bei der Annäherung an den Rand in jedem die Unstetigkeitspunkte nicht enthaltenden Teile von S *gleichmäßig.*

Es bleibt nur noch die Eindeutigkeitsfrage zu erledigen. Wir beschränken hierbei unsere Betrachtungen auf den Fall durchaus stetiger Randwerte. Die Lösung ist gewiß eindeutig. Denn sind etwa $u(x, y)$ und $u^*(x, y)$ zwei voneinander verschiedene Lösungen, so muß $u(x, y) - u^*(x, y)$ am Rande stetig gegen Null konvergieren, ist daher in T identisch gleich Null.

Bevor wir diesen Paragraphen schließen, leiten wir einen Satz ab, von dem wir in § 3 Gebrauch machen werden.

Es sei $\psi(t, \beta)$ eine stetige Funktion von t und von einem weiteren Parameter β in dem Gebiete

$$0 \leqq t \leqq 2\pi, \ \beta_0 \leqq \beta \leqq \beta_1 \qquad [\psi(t + 2\pi, \beta) = \psi(t, \beta)],$$

und es sei $u(x, y, \beta)$ diejenige in T reguläre Lösung der Differentialgleichung $L(u) = 0$, die auf S die Werte $\psi(t, \beta)$ annimmt. Aus dem Satze von *Paraf* folgt, wie man sofort sieht, *daß für alle β in dem Intervalle $\beta_0 \leqq \beta \leqq \beta_1$ und alle (x, y) in T und auf S die Lösung $u(x, y, \beta)$ eine stetige Funktion von x, y, β ist.* Ein analoger Satz gilt, wenn die Randfunktion von mehreren zusätzlichen Parametern abhängt.

Es möge jetzt $\psi(t, \beta)$ für alle t und β in dem Gebiete

$$(50.) \qquad 0 \leqq t \leqq 2\pi, \ \beta_0 + h_0 \leqq \beta \leqq \beta_1 - h_0, \ h_0 < \frac{\beta_1 - \beta_0}{2}$$

die stetige Ableitung $\frac{\partial \psi(t, \beta)}{\partial \beta}$ besitzen. Die Funktion

$$U(x, y, \beta, h) = \frac{1}{h} \{u(x, y, \beta + h) - u(x, y, \beta)\}$$

ist für $h \neq 0$, $|h| \leqq h_0$ diejenige in T reguläre Lösung von $L(u) = 0$, die auf S die Werte

$$\Psi(t, \beta, h) = \frac{1}{h} \{\psi(t, \beta + h) - \psi(t, \beta)\}$$

annimmt. Es sei ferner $u^*(x, y, \beta)$ für alle t und β in (50.) diejenige in T reguläre Lösung derselben Differentialgleichung, die auf S die Werte $\frac{\partial \psi(t, \beta)}{\partial \beta}$ erhält. Die Funktion $\Psi(t, \beta, h)$ ist in dem Gebiete

$$(51.) \qquad 0 \leqq t \leqq 2\pi, \ \beta_0 + h_0 \leqq \beta \leqq \beta_1 - h_0, \ h \neq 0, \ |h| \leqq h_0$$

stetig und geht für $h = 0$ stetig in $\frac{\partial \psi(t, \beta)}{\partial \beta}$ über. Nach dem zuletzt bewiesenen Satze geht $U(x, y, \beta, h)$ für alle (x, y) in T und auf S und alle β in dem Intervalle

$$(52.) \qquad \beta_0 + h_0 \leqq \beta \leqq \beta_1 - h_0$$

für $h = 0$ stetig in $u^*(x, y, \beta)$ über. *Die Lösung $u(x, y, \beta)$ hat also für alle β in* (52.) *eine in T und auf S stetige Ableitung in bezug auf β. Diese Ableitung ist diejenige in T reguläre Lösung der Differentialgleichung $L(u) = 0$, die auf S die Werte $\frac{\partial \psi(t, \beta)}{\partial \beta}$ annimmt.*

§ 3. Die definitive Auflösung des ersten Randwertproblems.

Wir lassen nunmehr unsere bisherigen Annahmen

$$c < 0,\ c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} < 0$$

fallen und suchen diejenige beschränkte, in T reguläre Lösung der Differentialgleichung (1.) zu bestimmen, die auf S eine vorgeschriebene, abteilungsweise stetige Folge von Werten $\varphi(t)$ annimmt. Es sei c_0 irgendeine den Bedingungen

$$c_0 < 0,\ c_0 - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} < 0 \quad \text{in } T^*$$

genügende Zahlgröße. Für (1.) setzen wir die äquivalente Differentialgleichung

$$(53.)\quad \bar{L}(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c_0 u = f + (c_0 - c)u.$$

Es sei $u_0(x, y)$ diejenige beschränkte, in T reguläre Lösung der Differentialgleichung $\bar{L}(u) = 0$, die auf S die Werte $\varphi(t)$ annimmt, $\bar{\mathfrak{H}}$ die zu T gehörige *Green*sche Funktion der zu $\bar{L}(u) = 0$ adjungierten Differentialgleichung

$$(54.)\quad \bar{M}(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - a\frac{\partial u}{\partial x} - b\frac{\partial u}{\partial y} + \left(c_0 - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y}\right)u = 0.$$

Es seien ferner $\bar{\mathfrak{G}}^0$ und $\bar{\mathfrak{H}}^0$ die zu T^0 gehörigen *Green*schen Funktionen der Gleichungen $\bar{L}(u) = 0$ und (54.). Betrachten wir die lineare, nicht homogene Integralgleichung

$$(55.)\quad u(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\iint_T \bar{\mathfrak{H}}(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + u_0(x, y)$$
$$-\frac{1}{2\pi}\iint_T \bar{\mathfrak{H}}(x, y; \xi, \eta)[c_0 - c(\xi, \eta)]u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Ihr Kern wird für $x = \xi, y = \eta$ logarithmisch unendlich. Sie geht daher nach einer Iteration in eine der *Fredholm*schen Theorie zugängliche Integralgleichung über.

Es können zwei Fälle vorkommen. Entweder hat die Integralgleichung (55.) stets eine und nur eine Lösung, oder die zu (55.) gehörige homogene Integralgleichung hat eine endliche Anzahl linear unabhängiger Lösungen. Es möge zunächst der erste Fall vorliegen. Die Funktionen $u(x, y)$ und $u_0(x, y)$ nehmen offenbar auf S dieselben Werte an. Die beiden ersten Glieder auf der rechten Seite der Gleichung (55.) sind Funk-

tionen, welche im Innern von T stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung haben. Das dritte Glied rechter Hand hat in T sicher stetige Ableitungen erster Ordnung. Dies sieht man so ein:

Es sei $q(x, y)$ eine beschränkte, in T stetige Funktion, (X_0, Y_0) irgendein Punkt in T und

$$\mu(x, y) = \iint_T \bar{\mathfrak{H}}(x, y; \xi, \eta)\, q(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = \iint_T \bar{\mathfrak{H}}^0(x, y; \xi, \eta)\, q(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$
$$+ \iint_T \bar{\mathfrak{h}}(x, y; \xi, \eta)\, q(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = \mu_1(x, y) + \mu_2(x, y).$$

Hierin bezeichnet $\bar{\mathfrak{h}}(X, Y; x, y)$ diejenige in T reguläre Lösung der Differentialgleichung (54.), die auf S die Werte $-\bar{\mathfrak{H}}^0(X, Y; x, y) = -\bar{\mathfrak{G}}^0(x, y; X, Y)$ erhält. Diese Randwerte haben, als Funktion von (X, Y) betrachtet, für alle (x, y) auf S und alle (X, Y) in einer Umgebung von (X_0, Y_0) stetige Ableitungen erster Ordnung. Dem am Schluß des vorhergehenden Paragraphen bewiesenen Satze zufolge sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial X}\bar{\mathfrak{h}}(X, Y; x, y)$, $\frac{\partial}{\partial Y}\bar{\mathfrak{h}}(X, Y; x, y)$ für alle (x, y) in T und auf S und alle (X, Y) in einer Umgebung von (X_0, Y_0) vorhanden und stetig. In T sind daher $\frac{\partial \mu_2(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial \mu_2(x, y)}{\partial y}$ vorhanden und stetig. Daß $\frac{\partial \mu_1(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial \mu_1(x, y)}{\partial y}$ in T existieren und stetig sind, ergibt sich schließlich wie folgt.

Die Funktion $\bar{\mathfrak{H}}^0(X, Y; x, y)$ genügt einer Integralgleichung, die der Gleichung (14.) analog ist. Bezeichnet man mit $G^0(X, Y; x, y)$ die zu T^0 gehörige klassische *Green*sche Funktion, so ist, wie eine einfache Rechnung zeigt,

$$\bar{\mathfrak{H}}^0(X, Y; x, y) = -\frac{1}{2\pi}\iint_{T^0}\Big[a(\xi, \eta)\frac{\partial}{\partial \xi}G^0(x, y; \xi, \eta) + b(\xi, \eta)\frac{\partial}{\partial \eta}G^0(x, y; \xi, \eta)$$
$$+ c_0 G^0(x, y; \xi, \eta)\Big]\bar{\mathfrak{H}}^0(X, Y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + G^0(X, Y; x, y)$$

und daher

$$\iint_T \bar{\mathfrak{H}}^0(x, y; \xi, \eta)\, q(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = -\frac{1}{2\pi}\iint_{T^0}\bar{\mathfrak{H}}^0(x, y; \xi, \eta)\, q_1(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$
$$+ \iint_T G^0(x, y; \xi, \eta)\, q(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \quad q_1(\xi, \eta) = \iint_T \Big\{a(\xi, \eta)\frac{\partial}{\partial \xi}G^0(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)$$
$$+ b(\xi, \eta)\frac{\partial}{\partial \eta}G^0(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) + c_0 G^0(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)\Big\}\, q(\xi_1, \eta_1)\, d\xi_1\, d\eta_1.$$

Die Funktion $q_1(\xi, \eta)$ ist in T^0 und auf S^0 stetig und genügt, wie sich leicht

zeigen läßt, in T der *Hölder*schen Bedingung*). Das Doppelintegral

$$\iint_{T^0} \bar{\mathfrak{H}}^0(x, y; \xi, \eta)\, q_1(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

hat somit für alle (x, y) in T stetige partielle Ableitungen der beiden ersten Ordnungen. Das Doppelintegral

$$\iint_{T^0} G^0(x, y; \xi, \eta)\, q(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

hat aber gewiß stetige partielle Ableitungen erster Ordnung.

Damit ist gezeigt, daß $u(x, y)$ in T stetige Ableitungen erster Ordnung hat. Da nunmehr die in T und auf S beschränkte Funktion $[c_0 - c(\xi, \eta)]u(\xi, \eta)$ in T der *Hölder*schen Bedingung genügt, so ist $u(x, y)$ eine in T reguläre Lösung der Differentialgleichung

$$\bar{L}(u) = f + (c_0 - c)u^{**}).$$

Da schließlich $u(x, y)$ auf S gleich $\varphi(s)$ ist, so ist $u(x, y)$ eine Lösung des Randwertproblems.

Es möge jetzt die vorgeschriebene Randfunktion durchaus stetig sein, und es sei $u(x, y)$ irgendeine Lösung des Randwertproblems***). Alsdann ist $u(x, y) - u_0(x, y)$ eine auf S verschwindende Lösung der Differentialgleichung

$$\bar{L}(u) = f + (c_0 - c)u.$$

Da die Funktion auf der rechten Seite dieser Gleichung in T der *Hölder*schen Bedingung genügt, so ist

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \iint_T \bar{\mathfrak{H}}(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + u_0(x, y)$$
$$- \frac{1}{2\pi} \iint_T \bar{\mathfrak{H}}(x, y; \xi, \eta)[c_0 - c(\xi, \eta)]u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Die vorhin gefundene Lösung ist also die *einzige* Lösung des Problems.

In ähnlicher Weise wird gezeigt, daß, wenn die zu (55.) gehörige homogene Integralgleichung p linear unabhängige Lösungen $u_1(x, y), \ldots u_p(x, y)$ besitzt, zugleich die Differentialgleichung $L(u) = 0$ p von Null verschiedene, in T reguläre, auf S verschwindende Lösungen hat. Diese Lösungen sind $u_1(x, y), \ldots u_p(x, y)$.

*) Vgl. die Fußnote auf Seite 4.

) Vgl. die Fußnote*) auf Seite 26.

***) Bei der Behandlung der Eindeutigkeitsfrage beschränken wir uns wie am Schluß des vorhergehenden Paragraphen auf die Betrachtung durchaus stetiger Randwerte.

Kapitel III. Die allgemeine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Zurückführung auf die Normalform.

Es sei $\bar{\Theta}$ ein von einer geschlossenen, stetig gekrümmten doppelpunktlosen Kurve $\bar{\Sigma}$ begrenztes Gebiet in der Ebene der Variablen x und y, Θ irgendein ganz im Innern von $\bar{\Theta}$ enthaltenes Gebiet, das von einer ebenfalls geschlossenen, stetig gekrümmten, doppelpunktlosen Kurve Σ begrenzt ist. Es seien A, B und C stetige in $\bar{\Theta}$ erklärte Funktionen von x und y, die daselbst stetige partielle Ableitungen der ersten und der zweiten Ordnung haben. Es mögen ferner D und E gewisse nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in $\bar{\Theta}$ stetige Funktionen, H eine stetige, in $\bar{\Theta}$ der *Hölder*schen Bedingung genügende Funktion bezeichnen.

Betrachten wir die allgemeine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vom elliptischen Typus

$$(56.)\quad A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=H,\quad AC-B^2=1$$

und die sich selbst adjungierte partielle Differentialgleichung

$$(57.)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\Big(A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(B\frac{\partial u}{\partial x}+C\frac{\partial u}{\partial y}\Big)=0.$$

Es sei $(\bar{x},\bar{y})$ irgendein Punkt in $\bar{\Theta}$ ganz außerhalb von Θ. Wie Herr *E. E. Levi* zuerst gezeigt hat, gibt es Lösungen (Grundlösungen) der Differentialgleichung (57.), die sich in $\bar{\Theta}$, außer im Punkte $(\bar{x},\bar{y})$, mit ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig verhalten, in $(x,\bar{y})$ aber logarithmisch unendlich werden. Ist $\Gamma(\bar{x},\bar{y};x,y)$ eine Lösung dieser Art, so ist

$$\Gamma^*(x,y)=\Gamma(\bar{x},\bar{y};x,y)+\frac{1}{2}\log\,[C(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x})^2-2B(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x})(y-\bar{y})+A(\bar{x},\bar{y})(y-\bar{y})^2]$$

im Punkte $(\bar{x},\bar{y})$ stetig, die Ausdrücke

$$\frac{\partial\Gamma^*}{\partial x}\{\log\,[(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2]\}^{-1},\qquad \frac{\partial\Gamma^*}{\partial y}\{\log\,[(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2]\}^{-1}$$

sind im Punkte $(\bar{x},\bar{y})$ beschränkt. Die Bestimmung einer Lösung $\Gamma(\bar{x},\bar{y};x,y)$, die für analytische A,B,C keine Schwierigkeiten bietet, ist von Herrn *E. E. Levi* auf die Auflösung einer gewissen linearen Integralgleichung

zurückgeführt worden*). Herr *E. E. Levi* macht übrigens die zusätzliche Voraussetzung, daß die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}, \cdots \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$ der *Hölder*schen Bedingung oder einer allgemeineren Bedingung von Herrn *Dini* genügen. Es läßt sich indessen zeigen, daß Lösungen der betrachteten Art existieren, auch wenn man die zuletzt genannte Voraussetzung, wie wir es tun wollen, fallen läßt, ja selbst dann, wenn es nicht bekannt ist, ob die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von A, B, C überhaupt existieren, wenn nur $\frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial A}{\partial y}, \frac{\partial B}{\partial x}, \frac{\partial B}{\partial y}, \frac{\partial C}{\partial x}, \frac{\partial C}{\partial y}$ in $\bar{\Theta}$ der *Hölder*schen Bedingung genügen**).

Es sei also $I'(\bar{x}, \bar{y}; x, y)$ eine Grundlösung von (57.). Sie ist in Θ und auf Σ nebst ihren partiellen Ableitungen der ersten und der zweiten Ordnung stetig. Wir bezeichnen sie kürzer mit $X(x, y)$. Es sei $Y(x, y)$ eine in Θ und auf Σ mit ihren partiellen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen stetige (zu $X(x, y)$ adjungierte) Lösung von (57.), die den Gleichungen

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = -B\frac{\partial X}{\partial x} - C\frac{\partial X}{\partial y}, \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = A\frac{\partial X}{\partial x} + B\frac{\partial X}{\partial y} \tag{58.}$$

genügt. Durch die Gleichungen $X = X(x, y)$, $Y = Y(x, y)$ wird das Gebiet Θ auf ein Gebiet Θ^* abgebildet, das die Ebene (X, Y), allgemein zu reden, mehrfach überdeckt. Von (X, Y) ausgehend werden wir aber zu einem anderen System zueinander adjungierter Lösungen $X_1(x, y)$, $Y_1(x, y)$ von (57.) gelangen, das folgende Eigenschaften hat:

Die partiellen Ableitungen der ersten und der zweiten Ordnung von X_1 und Y_1 sind in Θ und auf Σ stetig. Das Gebiet Θ_1, welches durch die Gleichungen

$$X_1 = X_1(x, y), \quad Y_1 = Y_1(x, y) \tag{59.}$$

dem Gebiete Θ zugeordnet wird, ist über der Ebene (X_1, Y_1) überall schlicht ausgebreitet. Die Beziehung (59.) *ist also eindeutig umkehrbar. Führt man X_1, Y_1 als neue Variabeln ein und setzt man*

$$u(x, y) = U(X_1, Y_1),$$

---

*) Vgl. *E. E. Levi*, Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. XXIV, 1907, S. 275—317.

**) Vgl. meine Arbeit: Beweis des Satzes, daß jedes hinreichend kleine, im wesentlichen stetig gekrümmte, singularitätenfreie Flächenstück auf einen Teil einer Ebene zusammenhängend und in den kleinsten Teilen ähnlich abgebildet werden kann. Abhandlungen der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften vom Jahre 1911.

so nimmt die Differentialgleichung (56.) *die Normalform*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y_1^2} + a_1 \frac{\partial U}{\partial X_1} + b_1 \frac{\partial U}{\partial Y_1} + c_1 U_1 = f_1 \tag{60.}$$

an.

Man kann $\bar{\Theta}$ in eine endliche Anzahl einfach zusammenhängender Teile zerlegen und in jedem Teilgebiete ein Paar zueinander adjungierter Lösungen $x_0(x, y)$, $y_0(x, y)$ der Differentialgleichung (57.) angeben, die folgende Eigenschaften haben:

1⁰) Sie sind nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig und erfüllen die zu (58.) analogen Differentialgleichungen.

2⁰) Die Ausdrücke

$$\left(\frac{\partial x_0(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_0(x,y)}{\partial y}\right)^2, \quad \left(\frac{\partial y_0(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_0(x,y)}{\partial y}\right)^2$$

sind wesentlich positiv*).

Aus (58.) folgt

$$\Delta = \frac{\partial(x_0, y_0)}{\partial(x, y)} = A\left(\frac{\partial x_0}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial x_0}{\partial x}\frac{\partial x_0}{\partial y} + C\left(\frac{\partial x_0}{\partial y}\right)^2. \tag{61.}$$

Dieser Ausdruck ist wegen $AC - B^2 = 1$ und wegen des Nichtverschwindens von $\left(\frac{\partial x_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_0}{\partial y}\right)^2$ wesentlich positiv. Aus dem Fundamentalsatze über die unentwickelten Funktionen folgt, daß man jedes der betrachteten Teilgebiete (somit auch $\bar{\Theta}$ selbst) in eine endliche Anzahl Teile τ zerlegen kann, die durch die Gleichungen $x_0 = x_0(x, y)$, $y_0 = y_0(x, y)$ umkehrbar eindeutig auf gewisse über der Ebene (x_0, y_0) schlicht ausgebreitete Gebiete τ_0 bezogen werden.

Führt man x_0 und y_0 als neue Variabeln ein, so geht (57.) in

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_0^2} = 0 \tag{62.}$$

über. Es ist daher in τ_0

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y_0^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y_0^2} = 0. \tag{63.}$$

Aus (58.) ergeben sich ferner in bekannter Weise die Beziehungen

$$\frac{\partial X}{\partial x_0} = \frac{\partial Y}{\partial y_0}, \quad \frac{\partial X}{\partial y_0} = -\frac{\partial Y}{\partial x_0}. \tag{64.}$$

In jedem ganz im Innern von τ_0 enthaltenen Gebiete ist die Anzahl der Punkte, in denen der Ausdruck

*) Vgl. meine vorhin zitierte Arbeit.

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x_0}\right)^2+\left(\frac{\partial X}{\partial y_0}\right)^2$$

verschwindet, gewiß endlich. Andernfalls würden nämlich $\frac{\partial X}{\partial x_0}$ und $\frac{\partial X}{\partial y_0}$ in τ_0 identisch verschwinden. Die Funktion X würde in τ_0 und daher, wie man leicht sieht, auch in dem ganzen Gebiete $\bar{\Theta}$ konstant sein, was ausgeschlossen ist. In jedem ganz im Innern von τ enthaltenen Gebiete ist die Anzahl der Punkte, in denen

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2=0, \tag{65.}$$

ebenfalls endlich. Man hat in der Tat

$$\frac{\partial X}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial x_0}\frac{\partial x_0}{\partial x}+\frac{\partial X}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial x},\quad \frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial X}{\partial x_0}\frac{\partial x_0}{\partial y}+\frac{\partial X}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial y}.$$

Da nun $\frac{\partial(x_0, y_0)}{\partial(x, y)}$ wesentlich positiv ist, so zieht (65.) die weiteren Beziehungen $\frac{\partial X}{\partial x_0}=0$, $\frac{\partial X}{\partial y_0}=0$ nach sich. Die Beziehung (65.) ist also in Θ und auf Σ nur in einer endlichen Anzahl von Stellen erfüllt. Das die Ebene (X, Y) im allgemeinen mehrfach überdeckende Gebiet Θ^*, das durch die Gleichungen $X=X(x, y)$, $Y=Y(x, y)$ dem Gebiete Θ zugeordnet wird, enthält daher in seinem Innern keine oder allenfalls nur eine endliche Anzahl Windungspunkte*). Dieses Gebiet ist gewiß einfach zusammenhängend und schlichtartig, d. h. es wird durch jeden Rückkehrschnitt zerstückelt. Beide Eigenschaften folgen aus der eindeutig umkehrbaren Zuordnung der Teilbereiche τ und τ_0 und aus den Beziehungen (64.), denen zufolge $X+iY$ eine in τ_0 reguläre analytische Funktion von x_0+iy_0 darstellt.

Es sei jetzt

$$Z_1=Z_1(Z)$$

eine analytische Funktion, durch deren Vermittelung das Gebiet Θ^* auf ein die Ebene überall einfach bedeckendes Gebiet Θ_1 konform abgebildet wird. Wir setzen

$$Z_1=X_1(x, y)+iY_1(x, y).$$

Die Funktionen $X_1(x, y)$, $Y_1(x, y)$ sind gewisse in Θ erklärte, zueinander

*) Sollte ein Windungspunkt gerade auf dem Rande von Θ^* liegen, so kann man Σ derart deformieren, daß der betreffende Windungspunkt nunmehr ins Innere von Θ^* gelangt.

adjungierte Lösungen der Differentialgleichung (57.). Die Gebiete Θ und Θ_1 sind durch die Gleichungen $X_1 = X_1(x, y)$, $Y_1 = Y_1(x, y)$ umkehrbar eindeutig aufeinander bezogen. Der Ausdruck

$$\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_1}{\partial y}\right)^2$$

ist in Θ wesentlich positiv.

Denn in jedem Teilgebiete τ ist sowohl

$$\left(\frac{\partial x_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_0}{\partial y}\right)^2 \neq 0,$$

als auch, wie man leicht sieht,

$$\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_1}{\partial y_0}\right)^2 \neq 0.$$

Führt man jetzt X_1 und Y_1 als neue Variabeln ein und setzt man zur Vereinfachung

$$\begin{aligned}\lambda &= A(x, y)\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}\right)^2 + 2B(x, y)\frac{\partial X_1}{\partial x}\frac{\partial X_1}{\partial y} + C(x, y)\left(\frac{\partial X_1}{\partial y}\right)^2 \\ &= A(x, y)\left(\frac{\partial Y_1}{\partial x}\right)^2 + 2B(x, y)\frac{\partial Y_1}{\partial x}\frac{\partial Y_1}{\partial y} + C(x, y)\left(\frac{\partial Y_1}{\partial y}\right)^2,\end{aligned}$$

$$u(x, y) = U(X_1, Y_1),$$

so geht, wie man sich durch direkte Ausrechnung überzeugt, die Gleichung (56.) über in

$$\begin{aligned}&\lambda\left(\frac{\partial^2 U}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y_1^2}\right) + \frac{\partial U}{\partial X_1}\left\{\frac{\partial X_1}{\partial x}\left(D - \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y}\right) + \frac{\partial X_1}{\partial y}\left(E - \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial C}{\partial y}\right)\right\} \\ &+ \frac{\partial U}{\partial Y_1}\left\{\frac{\partial Y_1}{\partial x}\left(D - \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y}\right) + \frac{\partial Y_1}{\partial y}\left(E - \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial C}{\partial y}\right)\right\} + FU = H,\end{aligned} \tag{66.}$$

wofür wir zur Abkürzung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y_1^2} + a_1\frac{\partial U}{\partial X_1} + b_1\frac{\partial U}{\partial Y_1} + c_1 U = f_1 \tag{67.}$$

setzen wollen. Die Größe λ ist wesentlich positiv. Daher sind die Koeffizienten von (67.) im Innern und auf dem Rande von Θ_1 stetig. Die Funktionen a_1, b_1, c_1 haben daselbst stetige partielle Ableitungen erster Ordnung, die Funktion f_1 erfüllt in Θ_1 die *Hölder*sche Bedingung. Nimmt man ferner an, daß die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von A, B und C und die Ableitungen erster Ordnung von D und E der *Hölder*schen Bedingung genügen, so genügt dieser auch der Ausdruck

$\frac{\partial a_1}{\partial X_1}+\frac{\partial b_1}{\partial Y_1}$. Durch die Substitution (59.) wird eine *Jordan*sche Kurve Π, oder spezieller eine Kurve mit stetiger Tangente in Θ in eine ebensolche Kurve in Θ_1 übergeführt. Ist ein von einer *Jordan*schen Kurve in Θ begrenztes Gebiet quadrierbar, so ist es auch das entsprechende Gebiet in Θ_1. Hat die Kurve Π die am Schluß des § 1 von Kap. II angegebenen Eigenschaften, so hat die Kurve Π_1 die gleichen Eigenschaften. Abteilungsweise stetigen Randwerten auf Π entsprechen schließlich abteilungsweise stetige Randwerte auf Π_1. Das erste Randwertproblem der Theorie der Differentialgleichung (56.) ist auf dasjenige der Differentialgleichung (67.) zurückgeführt.

Inhaltsübersicht.

		Seite
Kapitel I.	Die elliptischen Differentialgleichungen in der Normalform. Stetig gekrümmte Randkurven	3
	§ 1. Reguläre Lösungen	3
	§ 2. Die am Rande verschwindende *Green*sche Funktion	8
	§ 3. Reguläre Lösungen (Fortsetzung)	14
	§ 4. Der besondere Fall $c<0$. Das alternierende Verfahren	16
Kapitel II.	Die elliptischen Differentialgleichungen in der Normalform. Allgemeine Gebiete	20
	§ 1. Der besondere Fall $c<0$. Die am Rande verschwindende *Green*sche Funktion	20
	§ 2. Der besondere Fall $c<0$, $c-\frac{\partial a}{\partial x}-\frac{\partial b}{\partial y}<0$. Das erste Randwertproblem	25
	§ 3. Die definitive Auflösung des ersten Randwertproblems	32
Kapitel III.	Die allgemeine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Zurückführung auf die Normalform	35

Über den Rest von $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ (mod. p).

Von Herrn *P. Bachmann* in Weimar.

1. Die Bedingung, welche Herr *Wieferich* für die Auflösbarkeit der Gleichung

$$x^p + y^p + z^p = 0,$$

wo p eine ungerade Primzahl bedeutet, in ganzen durch p nicht teilbaren Zahlen x, y, z als erforderlich nachgewiesen hat (dieses Journ., Bd. 136), hat die Aufmerksamkeit wieder auf die Frage nach dem Reste gelenkt, den der Ausdruck

$$\frac{2^{p-1}-1}{p} \tag{1.}$$

(mod. p) läßt, eine Frage, welche u. a. bereits von *Stern* (ebend. Bd. 100, S. 182; vgl. des Verf. Niedere Zahlentheorie I, S. 159 ff.) behandelt worden ist. Ihm zufolge bestimmt sich dieser Rest durch die Kongruenz

$$\frac{2^{p-1}-1}{p} \equiv 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{p-2} \pmod{p}, \tag{2.}$$

in welcher $\frac{1}{u}$ den Sozius von u (mod. p) bedeutet, so daß man kürzer, diesen letzteren durch u' bezeichnend, schreiben darf

$$\frac{2^{p-1}-1}{p} \equiv \sum_u u' \pmod{p}, \tag{3.}$$

wenn die Summation auf alle ungeraden Zahlen u der Reihe $1, 2, 3, \ldots p-1$ erstreckt wird. Am einfachsten gewinnt man diese Formel durch binomische Entwicklung aus der Gleichung

$$2^p = (1+1)^p - (1-1)^p,$$

was

$$2^p - 2 = 2 \cdot \left[\binom{p}{1} + \binom{p}{2} + \cdots + \binom{p}{p-2}\right]$$

ergibt und nach Division mit $2p$ und Vernachlässigung von Vielfachen von p sogleich zur Formel (2.) hinführt. Wir leiten sie zunächst aus einer anderen, wohl noch nicht benutzten Quelle hier ab. Es sei, unter a, b, c beliebige Zahlen verstanden,

$$(4.)\quad S=(a+b+c)^p-(a+b-c)^p-(a-b+c)^p-(-a+b+c)^p.$$

Mit Beachtung der Formel

$$(m+n)^p-(m-n)^p$$
$$=2\left[\binom{p}{1}m^{p-1}n+\binom{p}{3}m^{p-3}n^3+\cdots+\binom{p}{p-2}m^2n^{p-2}+n^p\right]$$

läßt sich S in folgender Weise darstellen:

$$(5.)\quad S=2\Big[\binom{p}{1}\cdot c[(a+b)^{p-1}-(a-b)^{p-1}]+\binom{p}{3}\cdot c^3[(a+b)^{p-3}-(a-b)^{p-3}]$$
$$+\cdots+\binom{p}{p-2}\cdot c^{p-2}[(a+b)^2-(a-b)^2]\Big].$$

Aus dieser allgemeinen Formel erhält man für $a=b=1$, $c=2$ die besondere:

$$2^{p+1}\cdot\frac{2^{p-1}-1}{p}$$
$$=2\cdot\Big[2\cdot2^{p-1}+\frac{(p-1)(p-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot2^3\cdot2^{p-3}+\frac{(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\cdot2^5\cdot2^{p-5}$$
$$+\cdots+\frac{(p-1)(p-2)\cdots3}{1\cdot2\cdot3\cdots(p-2)}\cdot2^{p-2}\cdot2^2\Big]$$

oder, wenn mit 2^{p+1} geteilt wird und zur Rechten nur die Reste (mod. p) genommen werden, wieder die gedachte Formel (2.). Setzt man dagegen $a=b=c=1$, so entsteht die Beziehung

$$\frac{3^p-3}{p}$$
$$=2\cdot\Big[2^{p-1}+\frac{(p-1)(p-2)}{1\cdot2\cdot3}2^{p-3}+\frac{(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\cdot2^{p-5}+\cdots$$
$$+\frac{(p-1)(p-2)\cdots3}{1\cdot2\cdot3\cdots(p-2)}\cdot2^2\Big]$$

und hieraus die, soviel ich weiß, noch nicht angegebene Kongruenz

$$(6.)\quad\frac{3^p-3}{p}\equiv2\left[\frac{2^{p-1}}{1}+\frac{2^{p-3}}{3}+\frac{2^{p-5}}{5}+\cdots+\frac{2^2}{p-2}\right]\ (\text{mod. }p),$$

welcher nach Herrn *Mirimanoff*s Mitteilung in den Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences, Paris, 1910 (vgl. auch dieses Journ., Bd. 139, S. 309) für die Auflösbarkeit der *Fermat*schen Gleichung dieselbe Bedeutung zukommt, wie der Kongruenz (2.).

Die letztere kann übrigens auch durch die folgende ersetzt werden:

$$(7.)\quad\frac{2^p-2}{p}\equiv1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{p-2}-\frac{1}{p-1}\ (\text{mod. }p).$$

Diese gewinnt man unmittelbar und ganz analog wie (2.) und (6.) aus der binomischen Entwicklung der Gleichung

$$2^p = (1+1)^p.$$

Auf demselben Wege kommt

$$3^p = (2+1)^p = 2^p + \binom{p}{1} 2^{p-1} + \binom{p}{2} 2^{p-2} + \cdots + \binom{p}{p-1} \cdot 2 + 1,$$

mithin

$$\frac{3^p-3}{p} \equiv \frac{2^p-2}{p} + 2^{p-1} - \frac{1}{2} \cdot 2^{p-2} + \frac{1}{3} \cdot 2^{p-3} \cdots - \frac{1}{p-1} \cdot 2 \pmod{p}.$$

Aus dieser Beziehung zwischen den beiden Quotienten $\frac{2^p-2}{p}$, $\frac{3^p-3}{p}$ leitet man mit Rücksicht auf (6.) noch einen neuen Ausdruck zur Restbestimmung des ersteren her, nämlich folgende Formel:

(8.) $$\frac{2^p-2}{p} \equiv 2^{p-1} + \frac{1}{2} \cdot 2^{p-2} + \frac{1}{3} \cdot 2^{p-3} + \cdots + \frac{1}{p-2} \cdot 2^2 + \frac{1}{p-1} \cdot 2 \pmod{p}.$$

2. Aber alle diese eleganten Formeln bieten keine rechte Handhabe dar, um zu entscheiden, ob oder wann die gedachten Quotienten durch p teilbar sind. Man wird daher dazu geführt, andere Ausdrücke aufzusuchen, welche vielleicht dazu geeigneter sind. Ich habe versucht, den bereits auch sonst schon gegebenen einen neuen hinzuzufügen, und teile hier mit, was ich bisher gefunden.

Man teile in der Kongruenz (2.) die Zahlen u in die α Zahlen v, deren Sozius v' ebenfalls ungerade, und in die β Zahlen w, deren Sozius w' gerade ist, so daß, wenn $p - w' = v_1$ gesetzt wird, v_1 eine der Zahlen u und $wv_1 \equiv -1 \pmod{p}$ ist. Sowohl die Zahlen v' als auch die Zahlen v_1 sind untereinander verschieden, aber auch die v_1 von den v', denn, wäre ein v_1 gleich einem der v', so folgte eine Kongruenz $(v+w)\,v' \equiv 0$, welche unmöglich ist, da $v+w<2p$ und gerade, also von p verschieden ist. Hieraus ergeben sich die Produkte

$$\Pi v \cdot \Pi w = \Pi v' \cdot \Pi v_1 = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (p-2)$$

und aus den Kongruenzen $vv' \equiv 1$, $wv_1 \equiv -1$ die andere:

$$[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (p-2)]^2 \equiv (-1)^\beta \pmod{p},$$

welcher die Form

$$2^{p-1} \cdot \left(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \frac{p-1}{2}\right)^2 \equiv (-1)^\beta$$

oder, da bekanntlich

$$\left(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \frac{p-1}{2}\right)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}}$$

ist, die Form

$$(-1)^{\frac{p+1}{2}} \equiv (-1)^{\beta} \pmod{p}$$

gegeben werden kann. Daraus folgt $\beta \equiv \frac{p+1}{2} \pmod 2$; da aber $\alpha + \beta = \frac{p-1}{2}$ ist, ergibt sich $\alpha \equiv 1 \pmod 2$, d. i. als eine *ungerade* Zahl, während β gerade oder ungerade ist, je nachdem $p \equiv 3$ oder $\equiv 1 \pmod 4$ ist.

Ferner ist

$$\frac{2^{p-1}-1}{p} \equiv \Sigma v' + \Sigma w' \equiv \Sigma v' - \Sigma v_1 \pmod{p},$$

und da

$$\Sigma v' + \Sigma v_1 = 1 + 3 + 5 + \cdots + (p-2) = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$$

ist, findet sich die Kongruenz

$$\frac{2^{p-1}-1}{p} + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \equiv 2 \cdot \Sigma v' \pmod{p}. \tag{9.}$$

Die Zahlen v' stimmen insgesamt mit den Zahlen v überein, denn sonst gehörte ein v' zu den Zahlen w, und sein Sozius müßte gerade sein, entgegen der Kongruenz $v'v \equiv 1$; also ist

$$\Sigma v' = \Sigma v. \tag{10.}$$

Setzt man nun

$$v + v' = 2s, \tag{11.}$$

so ist s eine der Zahlen $1, 2, 3, \ldots p-2$; dem Werte $s = 1$ entsprechen $v = v' = 1$. Da aus den Beziehungen

$$v + v' = 2s, \quad vv' \equiv 1 \pmod{p} \tag{12.}$$

sich v, v' als Wurzeln der Kongruenz

$$z^2 - 2sz + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

ergeben, welche nur für $s = 1$ einander gleich sind, so entsprechen jedem der übrigen zulässigen Werte von s nur zwei Paare von Zahlen: v, v' und v', v; es gibt daher außer $s = 1$ genau $\frac{\alpha-1}{2}$ zulässige Werte

$$s_1, s_2, \ldots s_{\frac{\alpha-1}{2}} \tag{13.}$$

von s. Addiert man dann alle Gleichungen (11.), so findet sich wegen (10.)

$$\Sigma v = 1 + 2s_1 + 2s_2 + \cdots + 2s_{\frac{\alpha-1}{2}}. \tag{14.}$$

3. Um die Zahlen (13.) zu bestimmen, verstehe man jetzt unter s eine der Zahlen $2, 3, \ldots p-2$ und bemerke, daß aus den Beziehungen (12.) oder aus den Gleichungen

$$v+v'=2s,\ vv'=1+2px,$$

worin $x>0$, wenn $s>1$ ist, sich v, v' als die Wurzeln der *Gleichung*

$$z^2-2sz+1+2px=0$$

ergeben, deren Wurzeln

$$z=s\pm\sqrt{s^2-1-2px}$$

sind. Damit die letzteren ganze Zahlen sind, muß der Ausdruck

$$s^2-1-2px$$

das Quadrat einer ganzen Zahl t sein, die positiv gedacht werden darf:

(15.) $$s^2-1-2px=t^2,$$

wodurch $t<s$ folgt; da es mit s von ungleicher Parität ist, werden dann die Wurzeln positiv und ungerade sein; damit sie aber auch kleiner als p ausfallen, muß $s+t<p$ oder $t<p-s$ sein. Diese notwendigen Bedingungen sind offenbar auch dafür hinreichend, daß s eine der Zahlen (13.) sei. Nun erfordert das Bestehen der Gleichung (15.), daß

(16.) $$\left(\frac{t^2+1}{p}\right)=1$$

ist, während wegen $t<s$ und $t<p-s$ auch

(17.) $$0<t<\frac{p}{2}$$

sein muß. Ist t ein diesen Bedingungen gehorchender Wert, so hat die Kongruenz

(18.) $$z^2\equiv t^2+1 \pmod{p}$$

zwei Wurzeln s und $\sigma=p-s$, deren kleinere s sei, so daß $s<\frac{p}{2}$ ist. Eine dieser Wurzeln ist ungleichartig mit t; ist es die Wurzel s, mithin $(-1)^{s+t+1}=1$, so erfüllt die Zahl s die Gleichung (15.) und ist eine Zahl s_i der Reihe (13.), sobald $s>t$ ist; ist es dagegen die Wurzel σ, also

$$(-1)^{p-s+t+1}=1 \text{ oder } (-1)^{s+t+1}=-1,$$

so besteht eine Gleichung

$$\sigma^2-1-2px=t^2,$$

und σ wird gewiß eine Zahl s_i der Reihe (13.) sein, wenn wieder $s>t$ gedacht wird; daher wird dann $-s$ dieser Zahl s_i (mod. p) kongruent sein. Somit ist immer, wenn die kleinere Wurzel s der Kongruenz (18.), d. i. diejenige, welche $<\frac{p}{2}$ ist, größer als t ist,

$$(-1)^{s+t+1}\cdot s$$

einer Zahl s_i der Reihe (13.) kongruent (mod. p). Da aber auf solche

Weise, wenn t alle den Bedingungen (16.) und (17.) gehorchenden Werte durchläuft, sämtliche Zahlen (13.) erhalten werden müssen und jede nur einmal entstehen kann, weil jedem zulässigen Werte von s nach der Gleichung (15.) oder nach der Kongruenz

$$s^2 \equiv t^2 + 1 \pmod{p}$$

nur ein Wert $t < \frac{p}{2}$ entspricht, so findet sich die Kongruenz

$$(19.) \qquad s_1 + s_2 + \cdots + s_{\frac{a-1}{2}} \equiv \Sigma(-1)^{s+t+1} \cdot s \pmod{p},$$

wo die Summation auf alle diejenigen positiven Zahlen $t < \frac{p}{2}$ zu erstrecken ist, für welche $\left(\frac{t^2+1}{p}\right) = 1$ und die kleinere Wurzel s der Kongruenz (18.) größer als t ist.

Bedeutet aber $\sigma = p - s$ die zweite Wurzel dieser Kongruenz, welche nun $< p - t$ ist, so findet sich

$$(-1)^{\sigma+t+1} \cdot \sigma = (-1)^{s+t} \cdot (p - s) \equiv (-1)^{s+t+1} \cdot s \pmod{p},$$

und da zugleich $\operatorname{sgn}(\sigma - t) = \operatorname{sgn}(s - t) = 1$ ist, kommt

$$(20.) \quad 2 \cdot \Sigma(-1)^{s+t+1} s \equiv \Sigma[\operatorname{sgn}(s-t) \cdot (-1)^{s+t+1} \cdot s + \operatorname{sgn}(\sigma - t) \cdot (-1)^{\sigma+t+1} \cdot \sigma],$$

wo die Summation auf diejenigen positiven Zahlen $t < \frac{p}{2}$ zu erstrecken ist, für welche $\left(\frac{t^2+1}{p}\right) = 1$ ist und die beiden Wurzeln s, σ der Kongruenz (18.) zwischen t und $p - t$ liegen. Ist aber für ein der Bedingung $\left(\frac{t^2+1}{p}\right) = 1$ genügendes $t < \frac{p}{2}$ die kleinere Wurzel s der Kongruenz (18.) kleiner als t, so ist ihre größere Wurzel σ größer als $p - t$, und man findet wieder

$$(-1)^{\sigma+t+1} \cdot \sigma \equiv (-1)^{s+t+1} \cdot s \pmod{p},$$

dagegen $\operatorname{sgn}(\sigma - t) = -\operatorname{sgn}(s - t)$, mithin

$$\operatorname{sgn}(\sigma - t) \cdot (-1)^{\sigma+t+1} \cdot \sigma + \operatorname{sgn}(s - t) \cdot (-1)^{s+t+1} \cdot s \equiv 0.$$

Man darf daher jedes Glied dieser Art der Summe zur Rechten von (20.) hinzufügen oder die Summation auf sämtliche $t < \frac{p}{2}$, für welche $\left(\frac{t^2+1}{p}\right) = 1$ ist, erstrecken und unter s, σ die beiden Wurzeln der zugehörigen Kongruenz (18.) verstehen. Diese sind aber zugleich auch die beiden Wurzeln der Kongruenz

$$z^2 \equiv \imath^2 + 1 \pmod{p},$$

worin $\tau = p - t$ gedacht ist; da nun leicht die Kongruenzen

$$\operatorname{sgn}(s-\tau)\cdot(-1)^{s+\tau+1}\cdot s \equiv \operatorname{sgn}(\sigma-t)\cdot(-1)^{\sigma+t+1}\cdot\sigma,$$
$$\operatorname{sgn}(\sigma-\tau)\cdot(-1)^{\sigma+\tau+1}\cdot\sigma \equiv \operatorname{sgn}(s-t)\cdot(-1)^{s+t+1}\cdot s$$

bestätigt werden, darf die Summation zur Rechten von (20.), statt auf alle t, auch auf alle τ ausgedehnt und die Kongruenz (20.) auch folgendermaßen geschrieben werden:

(21.) $$4\cdot\Sigma(-1)^{s+t+1}\cdot s \equiv \Sigma\operatorname{sgn}(s-t)\cdot(-1)^{s+t+1}\cdot s,$$

wenn nunmehr rechts die Summation einfach über alle Lösungen der Kongruenz

(22.) $$s^2 \equiv t^2+1 \pmod{p}$$

in positiven ganzen Zahlen, welche $< p$ sind, ausgedehnt wird. Mit Rücksicht auf die Formeln (10.), (14.), (19.) und (21.) erhält man daher jetzt *die Kongruenz* (9.) *in nachstehender Gestalt*

(23.) $$\frac{2^{p-1}-1}{p}+\left(\frac{p-1}{2}\right)^2-2 \equiv \Sigma\operatorname{sgn}(s-t)\cdot(-1)^{s+t+1}\cdot s \pmod{p}.$$

4. Diese Zurückführung der Aufgabe auf eine ganz anders geartete, nämlich auf die Auflösung der Kongruenz (22.), scheint mir nicht ohne Interesse. Durch Einführung eines Multiplikators $w(z)$ aber, welcher gleich 1 ist, wenn z durch p teilbar, gleich 0, wenn z nicht durch p teilbar ist, so daß für jede ganze Zahl x

$$w(xp+z) = w(z)$$

ist, läßt sich die obige Summe mit Bezug auf s und t unabhängig voneinander auf alle Zahlen von 1 bis $p-1$ ausdehnen und die rechte Seite der Kongruenz (23.) ersetzen durch

(24.) $$\Sigma\Sigma\operatorname{sgn}(s-t)\cdot(-1)^{s+t+1}\cdot s\cdot w(s^2-t^2-1);$$

man braucht auch diejenigen Kombinationen s, t nicht auszuschließen, bei welchen $s=t$, das Symbol $\operatorname{sgn}(s-t)$ also unbestimmt ist, weil für sie $w(s^2-t^2-1)=0$ ist. Faßt man in der so ausgedehnten Doppelsumme die Glieder zusammen, welche einem bestimmten t entsprechen, so gibt dies den Ausdruck

$$-\sum_{s=1}^{t-1}(-1)^{s+t+1}\cdot s\cdot w(s^2-t^2-1)+\sum_{s=t+1}^{p-1}(-1)^{s+t+1}\cdot s\cdot w(s^2-t^2-1),$$

welcher, wenn im ersten Teile s durch $t-s$, im zweiten durch $t+s$ ersetzt wird, übergeht in

$$\sum_{s=1}^{t-1}(-1)^s\cdot(t-s)w(s^2-2ts-1)-\sum_{s=1}^{p-t-1}(-1)^s\cdot(t+s)w(s^2+2ts-1),$$

oder endlich, wenn hier im zweiten Teile $p-s$ für s gesetzt wird, und Vielfache von p vernachlässigt werden, in

$$\sum_{s=1}^{p-1}(-1)^s(t-s)\cdot w(s^2-2ts-1).$$

Demnach wird die Doppelsumme in (23.) zunächst kongruent mit

$$\sum_{s=1}^{p-1}\sum_{t=1}^{p-1}(-1)^s(t-s)\cdot w(s^2-2ts-1) \pmod{p}$$

oder, da für jedes s aus der Reihe $2, 3, \dots p-2$ ein einziges t der Reihe $1, 2, 3, \dots p-1$ vorhanden ist, für welches $s^2-2ts-1\equiv 0 \pmod{p}$ wird, für $s=1$ und $s=p-1$ aber $w(s^2-2ts-1)=0$ ist, kongruent mit

$$\sum_{s=1}^{p-1}\sum_{t=1}^{p-1}(-1)^s t\cdot w(s^2-2ts-1)-\sum_{s=2}^{p-2}(-1)^s\cdot s,$$

d. h. mit

$$\sum_{s=1}^{p-1}\sum_{t=1}^{p-1}(-1)^s t\cdot w(s^2-2ts-1)-\frac{p-1}{2}-2 \pmod{p}.$$

Die Kongruenz (23.) *erhält hierdurch die neue Gestalt:*

$$(25.)\quad \frac{2^{p-1}-1}{p}+\frac{p^2-1}{4}\equiv\sum_{s=1}^{p-1}\sum_{t=1}^{p-1}(-1)^s t\cdot w(s^2-2ts-1) \pmod{p}.$$

5. Man darf, unter r die primitive p-te Einheitswurzel

$$r=e^{\frac{2\pi i}{p}}$$

verstehend,

$$w(z)=\frac{1}{p}\cdot\sum_{h=0}^{p-1}r^{hz}$$

wählen. Dann verwandelt sich die in der letzten Kongruenz auftretende Doppelsumme in eine dreifache, deren Summationen wir anordnen, wie folgt:

$$(26.)\qquad \frac{1}{p}\cdot\sum_{s=1}^{p-1}(-1)^s\cdot\sum_{h=0}^{p-1}r^{(s^2-1)h}\sum_{t=1}^{p-1}t\cdot r^{-2sht}.$$

Nun ist für jede primitive p-te Einheitswurzel ϱ

$$0=1+\varrho+\varrho^2+\cdots+\varrho^{p-2}+\varrho^{p-1}.$$

Setzt man also

$$R=1\cdot\varrho+2\cdot\varrho^2+3\cdot\varrho^3+\cdots+(p-1)\cdot\varrho^{p-1}$$

und addiert diese Gleichung zur vorhergehenden, so erhält man die Beziehung

$$R=1+2\varrho+3\varrho^2+4\varrho^3+\cdots+(p-1)\varrho^{p-2}+p\varrho^{p-1},$$

d. i.

$$R=\varrho^{p-1}\cdot R+p\varrho^{p-1},$$

mithin

$$R=-\frac{\varrho^{p-1}}{\varrho^{p-1}-1}\cdot p=-\frac{\varrho^{\frac{p-1}{2}}}{\varrho^{\frac{p-1}{2}}-\varrho^{-\frac{p-1}{2}}}\cdot p.$$

Indem man für $h>0$ hier $\varrho=r^{-2sh}$ wählt und den sich für R ergebenden Wert in (26.) einsetzt, geht die dreifache Summe über in die zweifache:

$$\sum_{s=1}^{p-1}(-1)^{s+1}\cdot\left[\sum_{h=1}^{p-1}\frac{r^{(s^2+s-1)h}}{r^{sh}-r^{-sh}}-\frac{p-1}{2}\right],$$

die jedoch einfacher geschrieben werden kann, wie folgt:

$$(27.)\qquad \sum_{s=1}^{p-1}(-1)^{s+1}\cdot\sum_{h=1}^{p-1}\frac{r^{(s^2+s-1)h}}{r^{sh}-r^{-sh}}.$$

Bei Umkehrung der Summationsordnung, und wenn dann bei der Summation nach s die geraden Werte g und die ungeraden Werte u von s unterschieden und die letzteren durch $p-g$ ersetzt werden, nimmt die Doppelsumme folgende Gestalt an:

$$-\sum_{h=1}^{p-1}r^{-h}\cdot\sum_{g}\frac{r^{g/2\cdot 2gh}+r^{(g/2+1)\cdot 2gh}}{r^{2gh}-1}$$

$$=-\sum_{h=1}^{p-1}r^{-h}\sum_{g}(r^{g/2\cdot 2gh}+2\cdot r^{(g/2-1)2gh}+\cdots+2r^{2gh}+2)-2\cdot\sum_{h=1}^{p-1}r^{-h}\sum_{g}\frac{1}{r^{2gh}-1}.$$

Wenn nun aber bei der ersten dieser beiden Doppelsummen wieder zuerst nach h summiert wird, so findet sie sich leicht kongruent mit

$$-\sum_{g}(g+1)=-\frac{p^2-1}{4}-\frac{p-1}{2}.$$

Der Ausdruck (27.) wird daher kongruent mit

$$\frac{p^2-1}{4}+\frac{p-1}{2}-2\cdot\sum_{h=1}^{p-1}r^{-h}\sum_{g}\frac{1}{r^{2gh}-1}.$$

Da das allgemeine Glied der letzten Doppelsumme bei Vertauschung von h mit $p-h$ in

$$r^h\cdot\frac{1}{r^{-2gh}-1}=-r^h-r^h\cdot\frac{1}{r^{2gh}-1}$$

übergeht, so darf man die zweifach genommene Doppelsumme auch durch

$$\frac{p-1}{2}-\sum_{h=1}^{p-1}(r^h-r^{-h})\cdot\sum_{g}\frac{1}{r^{2gh}-1}$$

ersetzen. *Hiernach gewinnt man aus der Kongruenz* (25.) *die nachstehende:*

$$(28.)\qquad \frac{2^{p-1}-1}{p}\equiv\sum_{h=1}^{p-1}(r^h-r^{-h})\sum_{g}\frac{1}{r^{2gh}-1},$$

der man, wenn

$$(29.) \qquad f_h(x) = \prod_g (x - r^{2gh}) = \prod_{s=1}^{\frac{p-1}{2}} (x - r^{4hs})$$

gesetzt wird, die Gestalt geben kann:

$$(30.) \qquad \frac{2^{p-1}-1}{p} \equiv \sum_{h=1}^{p-1} (r^{-h} - r^h) \cdot \frac{f_h'(1)}{f_h(1)} \pmod{p}.$$

Der Ausdruck

$$f_{-h}(x) = \prod_g (x - r^{-2gh}) = \prod_{s=1}^{\frac{p-1}{2}} (x - r^{-4hs})$$

ist konjugiert imaginär zu $f_h(x)$ und

$$f_h(x) \cdot f_{-h}(x) = F(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1},$$

mithin

$$\frac{f_h'(x)}{f_h(x)} + \frac{f_{-h}'(x)}{f_{-h}(x)} = \frac{F'(x)}{F(x)},$$

und insbesondere für $x = 1$

$$\frac{f_h'(1)}{f_h(1)} + \frac{f_{-h}'(1)}{f_{-h}(1)} = \frac{F'(1)}{F(1)} = \frac{p-1}{2};$$

daher ist der reelle Bestandteil von $\frac{f_h'(1)}{f_h(1)}$ gleich $\frac{p-1}{4}$. Von diesem darf aber in der Formel (30.) abgesehen werden, da offenbar

$$\sum_{h=1}^{p-1} (r^{-h} - r^h) \cdot \frac{p-1}{4} = 0$$

ist. *Nennt man also* I_h *den imaginären Bestandteil von* $\frac{f_h'(1)}{f_h(1)}$, *so gilt die Kongruenz:*

$$(31.) \qquad \frac{2^{p-1}-1}{p} \equiv \sum_{h=1}^{p-1} (r^{-h} - r^h) \cdot I_h \pmod{p}.$$

Die Formel (28.), der wir diese letzte Gestalt gegeben haben, läßt sich direkter wiedergewinnen. Ich habe hier den Weg mitgeteilt, auf dem ich sie zuerst gefunden, weil ich glaubte, die Formel (23.), aus der sie fließt, nicht unterdrücken zu sollen. Bisher gelang es mir nun noch nicht, für I_h einen einfachen Ausdruck zu finden, der geeignet wäre, weitere Schlüsse über den Rest von $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ (mod. p) zu ziehen; doch scheint mir die Zurückführung dieser Frage auf ein Gebiet der Kreisteilung, welchem die *Gauß*schen Summen angehören, wertvoll genug, um eine Mitteilung davon zu rechtfertigen.

Numerische Lösung der Gleichung

$$\frac{2^{-D}\log 2}{1-2^{-2D}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{p_n^{-D}\log p_n}{1-p_n^{-2D}},$$

wo p_n die Reihe der Primzahlen von 3 an durchläuft.

Von Herrn *Carl Burrau* in Kopenhagen.

Die Bedeutung der Zahl D, welche dieser Gleichung genügt, für die Theorie der ζ-Funktion geht aus den Untersuchungen von Herrn *Bohr* (dieses Journal, Bd. 141, S. 217) hervor. Von diesem aufgefordert, die Gleichung numerisch zu lösen, habe ich zuerst versucht, direkt die Reihe der Primzahlen anzuwenden und dadurch die Grenzen $2{\cdot}560 < D < 2{\cdot}579$ gefunden. Von Herrn Dr. *J. F. Steffensen* wurde jedoch meine Aufmerksamkeit darauf gerichtet, erstens, daß es wünchenswert wäre, wenn möglich, die direkte Benutzung der Primzahlen zu vermeiden, und zweitens, daß die von *Bohr* a. a. O. S. 229 in der Fußnote gegebene Bemerkung eine Transformation der Gleichung zuläßt, durch die sie zur numerischen Behandlung besser geeignet wird. Setzt man mit *Bohr:*

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n^{-D}\log p_n}{1-p_n^{-2D}},$$ so hat man auch $$R = \frac{\zeta'}{\zeta}(2D) - \frac{\zeta'}{\zeta}(D),$$

und die Gleichung nimmt die Form

$$0 = 2\cdot\frac{2^{-D}\log 2}{1-2^{-2D}} - \frac{\zeta'}{\zeta}(2D) + \frac{\zeta'}{\zeta}(D)$$

an. Daraus folgt, daß man den Wert von D zu suchen hat, für den die Funktion

$$\frac{\zeta(D)}{\sqrt{\zeta(2D)}}\cdot\frac{2^D-1}{2^D+1}$$

ihren Minimalwert bekommt. Nun war es mir bekannt, daß Herr *J. P. Gram*

schon vor Jahren die ζ-Funktion tabuliert hatte. Er hatte die Güte, mir die von ihm berechneten Tafeln, die mit dem Intervall 0·1 fortschreiten, zur Verfügung zu stellen, wofür ich mir erlaube, auch an diesem Orte meinen Dank abzustatten. Zur Interpolation ist die Funktion $(\sigma - 1)\,\zeta(\sigma)$ besser geeignet als die ζ-Funktion selbst, und aus den Tafeln *Grams* entnahm ich:

σ	$(\sigma-1)\,\zeta(\sigma)$	1. Differenz	2. Diff.	3. Diff.	4. Diff.	5. Diff.	6. Diff.
							− 454
						+ 5001	
					+ 31672		
				− 3129497			
2·5	2·01223088580		+ 98272528				
		+ 7653360876					
2·6	2·08876449456		+ 95179216				
				− 3052842			
					+ 44095		
						+ 3464	
							− 510
						− 96	
					+ 5834		
				− 162172			
5·1	4·2401604463		+ 3616099				
		+ 928110358					
5·2	4·3329714821		+ 3459666				
				− 150823			
					+ 5501		
						− 145	

Hieraus ergibt sich unter Anwendung der *Newton*schen Interpolationsformel:

$\sigma =$	2·5757	2·5759	2·5761	2·5763
$(\sigma-1)\,\zeta(\sigma) =$	2·07007811378	2·07023168059	2·07038525122	2·07053882570
	69	50	14	61
$(2\sigma-1)(2\sigma) =$	4·2878211521	4·2881924215	4·2885636965	4·2889349772
	3	7	7	4

Die vollangeführten Resultate sind unter Anwendung der Differenzen der absteigenden Schräglinie ermittelt, und darunter sind die Ziffern angeführt, die sich bei der Anwendung der aufsteigenden Schräglinie ändern. Es ergibt sich, daß die *Gram*schen Tafeln eine etwa 10-stellige Genauigkeit bei der Interpolation erlauben.

Die Funktion $\frac{2^\sigma - 1}{2^\sigma + 1}$ muß also mit einer entsprechenden Genauigkeit berechnet werden, um den vollen Nutzen aus den *Gram*schen Tafeln zu

erhalten. Unter Anwendung zwölfstelliger logarithmischer Rechnung fand ich für dieselben Werte von σ:

$\frac{2^\sigma-1}{2^\sigma+1}=$	0·712709793629	0·712743897887	0·712777998775	0·712812096293
$\zeta(\sigma)=$	1·31375142076	1·31368213749	1·31361287427	1·31354363104
$1/\zeta(2\sigma)=$	1·01629792923	1·01629296708	1·01628800652	1·01628304757

und schließlich:

σ	$\left[\frac{2^\sigma-1}{2^\sigma+1}\cdot\frac{\zeta(\sigma)}{\sqrt{\zeta(2\sigma)}}\right]=f(\sigma)$	$\frac{df(\sigma)}{d\sigma}$	
2·5757	0·921308089921		
2·5759	0·921308084963	− 0·0000157·	
			179
2·5761	0·921308083611	+ 0·0000021·	
			179
2·5763	0·921308085825	+ 0·0000200·	

daraus die Lösung

$$D = 2{\cdot}576076$$

mit einem Fehler, den ich geringer als 0·5 der letzten Stelle schätze.

(Die Berechnung ist auch für $\sigma = 2{\cdot}5765$ $\sigma = 2{\cdot}5773$ mit demselben Intervall von 0·0002 durchgeführt worden, und die erste Differenz von $\frac{df(\sigma)}{d\sigma}$ hält sich konstant gleich 179. Hieraus geht hervor, daß die Werte von $\frac{df(\sigma)}{d\sigma}$ richtig sind und daß die Interpolation die angegebene Genauigkeit der Lösung zuläßt.)

Neuer Beweis eines Satzes des Herrn *Burnside* über spezielle endliche Gruppen.

Von Herrn *R. Remak* in Berlin.

Die Untergruppe der invarianten Elemente einer Gruppe möge das Zentrum der Gruppe heißen. Herr *Burnside* hat folgenden Satz bewiesen*):

„Besitzt eine Gruppe $\mathfrak{G}$ *eine Reihe invarianter Untergruppen*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_0, \mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots \mathfrak{H}_n, E = \mathfrak{H}_{n+1}$$

derart, daß die Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{H}_{s-1}}{\mathfrak{H}_s}$ *das Zentrum der Faktorgruppe* $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{H}_s}$ *bildet für* $s = 1, 2, \ldots n+1$, *so ist* $\mathfrak{G}$ *das direkte Produkt von Gruppen von teilerfremden Primzahlpotenzordnungen.“* Für diesen Satz will ich einen einfacheren Beweis liefern.

Hilfssatz: Gehört das Kommutatorelement der Elemente A und B dem Zentrum der Gruppe an, so will ich es bezeichnen

$$c(A, B) = ABA^{-1}B^{-1}.$$

Es ist

$$c(A, B) \cdot c(A, C) = c(A, BC),$$

denn es ist

$$(ABA^{-1}B^{-1}) \cdot (ACA^{-1}C^{-1}) = ABA^{-1}(ACA^{-1}C^{-1})B^{-1}$$
$$= ABCA^{-1}C^{-1}B^{-1} = A(BC)A^{-1}(BC)^{-1}.$$

Ebenso ist

$$c(A, C) \cdot c(B, C) = c(AB, C),$$

weil

*) Theory of Groups of Finite Order by *W. Burnside*, 1. Aufl. 1897. S. 115. 2. Aufl. 1911. S. 167. Über Gruppen derselben Art vgl. auch *A. Löwy*: Über eine besondere Gattung endlicher diskreter Gruppen. Math. Ann. Bd. 55, 1902. S. 67—69.

$$(ACA^{-1}C^{-1}) \cdot (BCB^{-1}C^{-1}) = A(BCB^{-1}C^{-1})CA^{-1}C^{-1}$$
$$= ABCB^{-1}A^{-1}C^{-1} = (AB)C(AB)^{-1}C^{-1}.$$

Es sei a die Ordnung von A, b die Ordnung von B. Dann ist

$$(c(A, B))^b = c(A, B^b) = c(A, E) = E,$$

wo E das Einheitselement bedeutet, ebenso

$$(c(A, B))^a = c(A^a, B) = c(E, B) = E.$$

Die Ordnung von $c(A, B)$ ist also gemeinsamer Teiler von a und b. Sind a und b teilerfremd, so ist

$$c(A, B) = E.$$

Ich gehe nun zum Beweise des *Burnside*schen Satzes über. Es sei die Ordnung von $\mathfrak{G}$ gleich

$$p^\alpha \cdot q^\beta \cdot r^\gamma \cdots,$$

wo $p, q, r, \ldots$ verschiedene Primzahlen sind. Der Satz sei bereits bewiesen für alle Gruppen der angegebenen Art, für die n kleiner ist als im vorliegenden Falle. Der Satz sei also bereits bekannt für die Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{H}_n}$:

$$\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{H}_n} = \frac{\mathfrak{P}_n}{\mathfrak{H}_n} \times \frac{\mathfrak{Q}_n}{\mathfrak{H}^n} \times \frac{\mathfrak{R}_n}{\mathfrak{H}_n} \times \cdots,$$

wo $\mathfrak{P}_n, \mathfrak{Q}_n, \mathfrak{R}_n, \ldots$ das Zentrum $\mathfrak{H}_n$ von $\mathfrak{G}$ als (invariante) Untergruppe enthalten und die Ordnungen von $\frac{\mathfrak{P}_n}{\mathfrak{H}_n}, \frac{\mathfrak{Q}_n}{\mathfrak{H}_n}, \frac{\mathfrak{R}_n}{\mathfrak{H}_n} \cdots$ bzw. $p^{\alpha_n}, q^{\beta_n}, r^{\gamma_n}, \ldots$ sind. Die Ordnung von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{H}_n}$ ist also $p^{\alpha_n} \cdot q^{\beta_n} \cdot r^{\gamma_n} \cdots$. Es besitze $\mathfrak{H}_n$ die Ordnung $p^{\alpha'_n} \cdot q^{\beta'_n} \cdot r^{\gamma'_n}$. Dann ist die Ordnung von $\mathfrak{G}$ gleich

$$p^{\alpha_n} \cdot q^{\beta_n} \cdot r^{\gamma_n} \cdots p^{\alpha'_n} \cdot q^{\beta'_n} \cdot r^{\gamma'_n} \cdots,$$

also ist

$$\alpha_n + \alpha'_n = \alpha,\ \beta_n + \beta'_n = \beta, \gamma_n + \gamma'_n = \gamma, \ldots.$$

$\mathfrak{P}_n$ besitzt die Ordnung

$$p^{\alpha_n} \cdot p^{\alpha'_n} \cdot q^{\beta'_n} \cdot r^{\gamma'_n} \cdots = p^\alpha \cdot q^{\beta'_n} \cdot r^{\gamma'_n} \cdots,$$

besitzt also nach dem *Sylow*schen Satze eine Untergruppe $\mathfrak{P}$ von der Ordnung p^α; ebenso besitzt $\mathfrak{Q}_n$ eine Untergruppe $\mathfrak{Q}$ von der Ordnung q^β, $\mathfrak{R}_n$ eine Untergruppe $\mathfrak{R}$ von der Ordnung r^γ. Es sei P ein Element von $\mathfrak{P}$, Q ein Element von $\mathfrak{Q}$. Es gehört das Kommutatorelement von P und Q dem Zentrum $\mathfrak{H}_n$ an, weil die entsprechenden Komplexe der Faktorgruppe nach $\mathfrak{H}_n$ vertauschbar sind. Da aber die Ordnungen von P und Q teilerfremd sind, so ist nach dem Hilfssatze

$$c(P, Q) = E;$$

P und Q sind miteinander vertauschbar. Ich behaupte, daß das Produkt

$$\mathfrak{G}' = \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{R} \cdots$$

ein direktes Produkt ist. $\mathfrak{P} \times \mathfrak{Q}$ ist ein direktes Produkt, weil $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ teilerfremd sind; die Ordnung von $\mathfrak{P} \times \mathfrak{Q}$ ist also $p^\alpha \cdot q^\beta$, die Ordnung von $\mathfrak{R}$ ist r^γ; also sind $\mathfrak{P} \times \mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ teilerfremd, also $\mathfrak{P} \times \mathfrak{Q} \times \mathfrak{R}$ ein direktes Produkt usw. Die Ordnung von $\mathfrak{G}'$ ist also $p^\alpha \cdot q^\beta \cdot r^\gamma \cdots$. Also ist $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}$, weil $\mathfrak{G}'$ in $\mathfrak{G}$ enthalten und von gleicher Ordnung wie $\mathfrak{G}$ ist. Also

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{P} \times \mathfrak{Q} \times \mathfrak{R} \times \cdots .$$

Da der Satz für $n = 0$, d. h. für kommutative Gruppen, bekannt ist, so gilt er allgemein.

Da alle Elemente von $\mathfrak{G}$, deren Ordnung eine Potenz von p ist, Elemente von $\mathfrak{P}$ sein müssen, so kann $\mathfrak{G}$ nur die eine Untergruppe $\mathfrak{P}$ von der Ordnung p^α besitzen.

Ein Satz über konjugierte Formen.

Von Herrn *J. Rosanes* in Breslau.

Es seien $\xi_1\,\xi_2\,\xi_3$ Punktkoordinaten, $u_1\,u_2\,u_3$ Geradenkoordinaten in einem ebenen Trilinearsystem, so daß $u_\xi \equiv u_1\xi_1 + u_2\xi_2 + u_3\xi_3 = 0$ die Inzidenz von ξ, u darstellt. Eine Form n-ten Grades $f(\xi^n) \equiv \sum_{ikl}^{1\ldots n} a_{ikl}\,\xi_i\xi_k\xi_l$ soll eine Punktform n-ten Grades (Punktgebilde n-ten Grades, Kurve n-ter Ordnung C_n) heißen; desgleichen $\varphi(u^n) \equiv \sum_{ikl}^{1\ldots n} a_{ikl}\,u_i\,u_k\,u_l$ eine Linienform n-ten Grades (Liniengebilde, Kurve n-ter Klasse K_n).

Es gilt dann folgender Satz*):

Sind $G(f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots f^{(p)}), g(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots \varphi^{(p)})$ *zwei Gruppen gleicher Mächtigkeit* p *von Punkt- bzw. Linienformen* n*-ten Grades, und enthält* G *eine Form* f*, die der ganzen Gruppe* g *konjugiert ist, dann gibt es auch in* g *eine Form* φ*, die mit* G *konjugiert ist***).

Beweis: Ist $f(\xi^n) \equiv r_1 f^{(1)} + r_2 f^{(2)} + \cdots + r_p f^{(p)}$ eine Form der verlangten Art, so müssen die Gleichungen bestehen:

$$I(f, \varphi^{(1)}) = 0,\ I(f, \varphi^{(2)}) = 0, \ldots I(f, \varphi^{(p)}) = 0,$$

wenn $I(f, \varphi)$ die bekannte bilineare Invariante $\Sigma a_{ikl}\,\alpha_{ikl}$ bedeutet. Ersetzt man f durch seinen Wert, so erhält man

*) Wegen der Terminologie beziehe ich mich auf meine Arbeit „Über ein Prinzip der Zuordnung algebraischer Formen“, dieses Journal, Bd. 76 S. 312 ff.

**) Der Satz läßt auch folgende sehr einfache Formulierung zu: Bilden die $N = \frac{n+1\cdot n+2}{2}$ Formen $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots f^{(N)}$ ein abhängiges System und teilt man sie willkürlich in zwei Gruppen $G(f^{(1)}, \ldots f^{(p)})$, $G'(f^{(p+1)}, \ldots f^{(N)})$, dann haben die diesen konjugierten Gruppen $g(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \varphi^{(q)})$, $g'(\varphi^{(q+1)}, \ldots \varphi^{(N)})$, $p + q = N$, ebenfalls eine Form φ gemein.

$$(1.)\qquad \begin{aligned} &r_1 I(f^{(1)}, \varphi^{(1)}) + r_2 I(f^{(2)}, \varphi^{(1)}) + \cdots + r_p I(f^{(p)}, \varphi^{(1)}) = 0,\\ &r_1 I(f^{(1)}, \varphi^{(2)}) + r_2 I(f^{(2)}, \varphi^{(2)}) + \cdots + r_p I(f^{(p)}, \varphi^{(2)}) = 0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &r_1 I(f^{(1)}, \varphi^{(p)}) + \cdots\cdots\cdots + r_p I(f^{(p)}, \varphi^{(p)}) = 0, \end{aligned}$$

d. h., es muß deren Determinante

$$(2.)\qquad |I(f^{(i)}, \varphi^{(k)})| = 0$$

sein. Ist umgekehrt diese Gleichung erfüllt, dann haben die Gleichungen (1.) eine gemeinsame Lösung $r_1, r_2, \ldots r_p$. Die mit deren Hilfe gebildete Form $f(\xi^n) \equiv r_1 f^{(1)} + r_2 f^{(2)} + \cdots + r_p f^{(p)}$ hat offenbar die Eigenschaft, G anzugehören und mit g konjugiert zu sein.

Zu derselben Gleichung (2.) gelangt man aber, wenn in g ein Element φ vorkommt, das mit G konjugiert ist; da die Umkehrung auch hier statthaft ist, *so ist der oben ausgesprochene Satz zugleich mit seiner Umkehrung bewiesen.*

Die Beschränkung auf drei Variable ist offenbar ganz unnötig; der Satz gilt für jede beliebige Zahl der Variablen, somit auch für Oberflächen.

Einige Einzelfälle, die geometrisch anschauliche Sätze ergeben, mögen noch besonders hervorgehoben werden.

Es sei $n = 2, p = 3, f^{(1)} \equiv a_\xi^2, f^{(2)} \equiv b_\xi^2, f^{(3)} \equiv c_\xi^2, \varphi^{(1)} \equiv u_a^2, \varphi^{(2)} \equiv u_\beta^2, \varphi^{(3)} \equiv u_\gamma^2$ (im ternären Gebiete), mit anderen Worten, es sei $G(aa, bb, cc)$ definiert durch drei Doppelgeraden, $g(\alpha\alpha, \beta\beta, \gamma\gamma)$ durch drei doppelte Punkte. Es besteht somit G aus sämtlichen Kurven zweiter Ordnung, die dem Dreiseit abc polar sind, und g aus den Kurven zweiter Klasse, die dem Dreieck $\alpha\beta\gamma$ polar sind. Der allgemeine Satz nimmt dann folgende Gestalt an:

*Gibt es eine C_2, die mit abc polar ist und zugleich durch $\alpha\beta\gamma$ hindurchgeht, dann existiert auch eine K_2, die mit $\alpha\beta\gamma$ polar ist und abc berührt, und umgekehrt**).

Wählt man $p = 4$, und geht von den Gruppen $G(aa, bb, cc, dd)$, $g(\alpha\alpha, \beta\beta, \gamma\gamma, \delta\delta)$ aus, so erhält man den Satz: *Sind $abcd$ vier Geraden, $\alpha\beta\gamma\delta$ vier Punkte einer Ebene und gibt es eine C_2, die durch $\alpha\beta\gamma\delta$ hin-*

*) Dieser Satz ist von Herrn *F. Mertens* in seiner Arbeit: „Über einen Satz der Kegelschnittlehre“ (Sitzungsber. d. math. naturwiss. Klasse d. Wiener Akademie 1886, Bd. 94, II. Abt., S. 794—796) bewiesen worden.

durchgeht und dem Vierseit abcd polar ist, dann existiert auch eine K_2, die abcd zu Tangenten hat und dem Viereck $\alpha\beta\gamma\delta$ polar ist, und umgekehrt.

Der Satz gilt fast wörtlich für fünf Geraden $abcde$ und fünf Punkte, wenn man immer eine Anzahl von Geraden $abcd\ldots$ zur Punktform f polar heißt, sobald f aus den Quadraten jener Linearformen sich zusammensetzen läßt, und entsprechend für Linienformen. Immer sind selbstverständlich die beiden Gebilde C_2, K_2 einander konjugiert. Für den Fall von fünf Geraden $abcde$ und fünf Punkten $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ ergibt sich hierbei, daß

$$\begin{vmatrix} a_\alpha^2 & b_\alpha^2 & c_\alpha^2 & d_\alpha^2 & e_\alpha^2 \\ a_\beta^2 & b_\beta^2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_\varepsilon^2 & \cdot & \cdot & \cdot & e_\varepsilon^2 \end{vmatrix} = 0$$

besagt: Die Kurve der fünf Punkte $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ ist konjugiert der Kurve der Tangenten $abcde$.

Die soeben ausgesprochenen Sätze gelten wörtlich auch für Oberflächen zweiten Grades, wenn man unter $\alpha\beta\gamma\ldots$ beliebige Punkte des Raumes, unter $abc\ldots$ Ebenen versteht.

Auch für Gebilde höheren Grades mag ein besonderer Fall angegeben werden.

Es sei $n=3$, $p=4$ und die Gruppen $G(aaa, bbb, ccc, ddd)$, $g(\alpha\alpha\alpha, \beta\beta\beta, \gamma\gamma\gamma, \delta\delta\delta)$ vorliegend.

Eine Punktform $f(\xi^3)$, die G angehört, ist dem Vierseit $abcd$ polar, d. h. je zwei Gegenecken des letztern sind konjugierte Punktepaare des *Hesse*schen $H(f)$.

Der Satz kann deshalb folgendermaßen ausgesprochen werden:

Sind $\begin{matrix} abcd \\ \alpha\beta\gamma\delta \end{matrix}$ *vier* $\begin{matrix} Geraden \\ Punkte \end{matrix}$ *derselben Ebene und gibt es eine C_3, die durch $\alpha\beta\gamma\delta$ hindurchgeht und mit abcd polar ist, dann existiert auch eine K_3, die abcd berührt und mit $\alpha\beta\gamma\delta$ polar ist.*

Ich kehre noch einmal zu den quadratischen ternären Formen zurück, und zwar zu dem Fall $p=6$:

$$G(a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, l^2), \quad g(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2, \delta^2, \varepsilon^2, \lambda^2)$$

wegen eines dabei auftretenden, freilich leicht zu beseitigenden Paradoxons.

Es ist zunächst geometrisch ohne weiteres klar, daß, wenn sowohl die links- als die rechtsstehenden Formen unter sich unabhängig sind *(was*

bis jetzt in sämtlichen Fällen vorausgesetzt wurde) weder eine Form $f(\xi^2)$, noch eine $\varphi(u^2)$ existieren kann, wie sie oben gefordert wurde. Algebraisch treten hier folgende sechs Gleichungen auf, (wenn ein $f(\xi^2)$ existiert)

$$(1\,\text{a.}) \quad \begin{cases} r_1 a_\alpha^2 + r_2 b_\alpha^2 + \cdots + r_6 l_\alpha^2 = 0, \\ r_1 a_\beta^2 + r_2 b_\beta^2 + \cdots + r_6 l_\beta^2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_1 a_\lambda^2 + r_2 b_\lambda^2 + \cdots + r_6 l_\lambda^2 = 0, \end{cases}$$

die ihrerseits bestehen können, wenn die Determinante

$$\begin{pmatrix} a\,b\,c\,d\,e\,l \\ \alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\lambda \end{pmatrix} \neq 0$$

ist. Nun ist aber $\begin{pmatrix} a\,b\,c\,d\,e\,l \\ \alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\lambda \end{pmatrix} \equiv (abcdel)\,(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\lambda)$, wenn $(abcdel)$ die sechsgliedrige Determinante aus den Koeffizienten der Formen $a_\xi^2, b_\xi^2, \ldots l_\xi^2$ bedeutet. Folglich erfordert das Bestehen der Gleichungen (1 a.), daß entweder die $abcdel$ oder $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\lambda$ abhängig sind.

Nehmen wir nun an, daß z. B. $(abcdel) = 0$, dagegen $(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\lambda) \neq 0$ sei. Dann gibt es sicherlich eine K_2, die $abcdel$ berührt und dem Sechseck $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\lambda$ polar ist, aber nicht eine C_2, die durch $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\lambda$ geht und mit $abcdel$ polar ist. Algebraisch scheint sich zunächst etwas anderes zu ergeben; da nämlich $(abcdel) = 0$ ist, so sind die Gleichungen (1 a.) vereinbar, und die mit diesen $r_1, \ldots r_6$ gebildete Form

$$r_1 a_\xi^2 + r_2 b_\xi^2 + r_3 c_\xi^2 + \cdots + r_6 l_\xi^2 \equiv f(\xi^2)$$

scheint eine C_2 zu liefern, die durch $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\lambda$ geht und mit $abcdel$ polar ist.

Die Lösung dieses Widerspruchs ist sehr einfach. Die Größen $r_1, \ldots r_6$, die (1 a.) befriedigen (es sollen die einzigen Lösungen sein), sind dieselben, welche $r_1 a_\xi^2 + r_2 b_\xi^2 + \cdots + r_6 b_\xi^2$ identisch zu Null machen. Es gibt also eine zwar aus den $a_\xi^2, \ldots b_\xi^2$ zusammensetzbare, aber uneigentliche Form, die $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\lambda$ zu Nullpunkten hat.

Über die ausgezeichneten Kurven algebraischer Flächen.

Von Herrn *Heinrich W. E. Jung* in Hamburg.

Einleitung.

Die algebraische Fläche F gehe durch birationale Transformation in die Fläche Φ über. Es entspricht dann im allgemeinen einem Punkte der Fläche F ein Punkt der Fläche Φ und umgekehrt. Es können aber auf F auch Kurven in endlicher Zahl vorkommen, denen auf Φ nur ein Punkt, und Punkte, denen auf Φ eine Kurve entspricht. Wird durch eine andere birationale Transformation F übergeführt in eine andere Fläche Φ_1, so können andere Kurven von F übergehen in Punkte von Φ_1. Man nennt solche Kurven einer algebraischen Fläche, die durch eine birationale Transformation in Punkte einer anderen Fläche übergehen können, *ausgezeichnete Kurven* der Fläche. Über diese ausgezeichneten Kurven einer algebraischen Fläche F soll im folgenden gesprochen werden. Es sind meistens bekannte*) Dinge, die behandelt werden, aber die Art der Behandlung ist neu. Auch werden keine einschränkenden Voraussetzungen über die Singularitäten der Flächen gemacht.

Die Hauptpunkte, die in der Arbeit behandelt werden, seien kurz angegeben.

1. Es hat sich als zweckmäßig erwiesen, den Begriff Kurve allgemeiner zu fassen, als ihn die Anschauung liefert. Man ordnet daher auch unter Umständen den isolierten singulären Punkten der Fläche F Kurven

*) Man vergleiche besonders: *Castelnuovo* und *Enriques*, Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche. Annali di Mat. (3), t. 6 (1901).

zu, die man sich gewissermaßen in die singulären Punkte kondensiert denkt. Geometrisch ist die Definition dieser Kurven nicht leicht. Analytisch ist sie einfach.

2. Geht durch eine birationale Transformation F in Φ über, so kann man sich die Aufgabe stellen, diejenigen Punkte von F zu bestimmen, die in Kurven von Φ übergehen, und umgekehrt die Punkte von Φ, die in Kurven von F übergehen, und die entsprechenden Kurven zu bestimmen und zu charakterisieren.

3. Man teilt die ausgezeichneten Kurven in zwei Klassen ein. Ist $\mathfrak{A}$ eine ausgezeichnete Kurve von F, so kann es sein, daß bei keiner Transformation, bei der $\mathfrak{A}$ in einen Punkt übergeht, ein Punkt von $\mathfrak{A}$ in eine Kurve übergeht. Man nennt dann $\mathfrak{A}$ von der ersten Klasse. Im anderen Falle heißt $\mathfrak{A}$ von der zweiten Klasse. Es sei bemerkt, daß es immer — sogar unendlich viele — Transformationen gibt, bei denen irgendein Punkt von $\mathfrak{A}$ in eine Kurve übergeht, aber, wenn $\mathfrak{A}$ zur ersten Klasse gehört, so geht bei einer solchen Transformation $\mathfrak{A}$ niemals in einen Punkt über. Es gilt der Satz:

Ist das geometrische Geschlecht oder eins der mehrfachen Geschlechte von F von Null verschieden, so hat F *nur* ausgezeichnete Kurven erster Klasse. Dieser Satz ist von den Herren *Castelnuovo* und *Enriques* durch geometrische Überlegungen bewiesen. Ich gebe hier einen analytischen Beweis. Die Herren *Castelnuovo* und *Enriques* geben ferner an, daß ausgezeichnete Kurven erster Klasse sich nicht schneiden können. Es zeigt sich aber, daß das nur von solchen ausgezeichneten Kurven erster Klasse gilt, die bei der Transformation in *verschiedene* Stellen von Φ übergehen, während unter solchen ausgezeichneten Kurven erster Klasse, die in *dieselbe* Stelle von Φ übergehen, immer solche vorkommen müssen, die sich schneiden.

4. Der virtuelle Grad $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K})$ der kanonischen Klasse $(\mathfrak{K})$ bleibt bei birationaler Transformation nicht invariant. Ist $(\mathfrak{K}')$ die kanonische Klasse von Φ und ist f die Zahl der Kurven von F, die in Punkte von Φ, und φ die Zahl der Kurven von Φ, die in Punkte von F übergehen, so ist

$$(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) + f = (\mathfrak{K}', \mathfrak{K}') + \varphi.$$

Dieser Satz wird hier nur bewiesen für den Fall, daß das geometrische Geschlecht oder eins der mehrfachen Geschlechte der Fläche von

Null verschieden ist, aber für beliebige Transformationen. In diesem Falle kann der Satz auch so ausgesprochen werden, da dann auf der Fläche F nur eine endliche Zahl von ausgezeichneten Kurven liegt:

Liegen auf der Fläche F a ausgezeichnete Kurven und ist $(\mathfrak{K})$ die kanonische Klasse von F, so ist

$$(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) + a$$

bei jeder birationalen Transformation invariant.

Der Beweis der Herren *Castelnuovo* und *Enriques* setzt sehr einfache Verhältnisse voraus, und es scheint mir nicht ohne weiteres einleuchtend, daß er auch bei beliebigen Transformationen gilt.

Die Zahl $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K})$ ist identisch mit $\omega - 1$, wo ω der *Castelnuovo-Enriques*sche Charakter der Fläche ist. Es ist auch $\omega = (\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) + 1$ das virtuelle Geschlecht des kanonischen Divisors $\mathfrak{K}$ oder das Geschlecht der Klasse $(\mathfrak{K})$.

5. Zum Schluß gehe ich als Anwendung auf das Verhalten der *Zeuthen-Segre*schen Invariante I bei birationaler Transformation ein. In einer im 34. Bande der Rend. del Circolo Mat. di Palermo erschienenen Arbeit über diese Invariante habe ich gezeigt, wie sie zu definieren ist bei Kurvenbüscheln und Flächen mit beliebigen Singularitäten. Ich zeige hier, daß auch dann, und zwar bei beliebigen birationalen Transformationen,

$$I + (\mathfrak{K}, \mathfrak{K})$$

invariant ist. Diesen Beweis führe ich aber auch nur unter der Voraussetzung, daß p_g oder eins der mehrfachen Geschlechte von Null verschieden ist.

Ich gebe nicht überall die ausführlichen Beweise und verweise deswegen auf folgende beide Arbeiten von mir: Primteiler algebraischer Funktionen zweier unabhängigen Veränderlichen und ihr Verhalten bei birationalen Transformationen in Bd. 26 der Rend. del Circolo Mat. di Palermo (im folgenden zitiert mit P.) und über die *Cremona*sche Transformation der Ebene in Bd. 38 dieses Journals (im folgenden zitiert mit C.). In der zweiten Arbeit handelt es sich zwar um *rationale* Funktionen zweier Veränderlichen, aber die Beweise sind für die algebraischen Funktionen zweier Veränderlichen zum Teil so ähnlich, daß es nicht notwendig erscheint, sie noch einmal zu wiederholen. Die vorliegende Arbeit habe ich mich aber bemüht, so zu schreiben, daß sie auch zu verstehen ist ohne Kenntnis der früheren Arbeiten.

1. Die Primteiler.

Wir betrachten einen algebraischen Körper K von zwei unabhängigen Veränderlichen. Zwischen je drei Größen von K besteht immer mindestens eine algebraische Gleichung. Es lassen sich auf unendlich viele Arten drei Größen x, y, z aus K so auswählen, daß sich alle Größen von K als rationale Funktionen von x, y, z darstellen lassen. Dabei können zwei der Größen x, y, z willkürlich gewählt werden mit nur der Einschränkung, daß nicht schon zwischen ihnen eine algebraische Gleichung besteht. Zwischen x, y, z besteht dann nur eine Gleichung, etwa $F = 0$. Wir können $F = 0$ als Gleichung einer Fläche auffassen, indem wir x, y, z als kartesiche Koordinaten betrachten. Die Fläche bezeichnen wir kurz mit F. Wir sagen von einer solchen Fläche F, daß sie den Körper darstellt. Solcher den Körper darstellender Flächen gibt es unendlich viele. Es seien ξ, η, ζ auch drei Größen aus K von der Art, daß sich alle Größen des Körpers darstellen lassen als rationale Funktionen von ξ, η, ζ. Die zwischen ξ, η, ζ bestehende algebraische Gleichung sei $\Phi = 0$. Es ist dann auch die Fläche Φ eine Fläche, die den Körper K darstellt. Die Größen x, y, z sind rationale Funktionen von ξ, η, ζ, und umgekehrt sind ξ, η, ζ rationale Funktionen von x, y, z. Den Übergang von der Fläche F zu Φ oder von den Veränderlichen x, y, z zu ξ, η, ζ nennt man birationale Transformation.

Es sei $\mathfrak{P}$ ein algebraischer Körper einer Veränderlichen, der zu K in folgender Beziehung steht. Jeder Größe aus K entspreche eindeutig eine aus $\mathfrak{P}$. Dagegen können einer Größe aus $\mathfrak{P}$ unendlich viele Größen aus K entsprechen. Jede algebraische Gleichung, die zwischen den Größen aus K besteht, soll auch bestehen zwischen den ihnen entsprechenden Größen aus $\mathfrak{P}$. Einen solchen Körper $\mathfrak{P}$ können wir z. B. dadurch bekommen, daß wir zwischen den Größen x, y, z außer der Gleichung $F = 0$ noch eine andere algebraische Gleichung festsetzen. Den Übergang von K zu $\mathfrak{P}$ drücken wir kurz so aus, daß wir sagen, wir setzen $\mathfrak{P} = 0$. Ein solcher Körper $\mathfrak{P}$ heißt ein Primteiler erster Stufe von K.

Eine Funktion R des Körpers K ist durch $\mathfrak{P}$ teilbar, wenn sie für $\mathfrak{P} = 0$ identisch Null wird, d. h. wenn ihr im Körper $\mathfrak{P}$ die Null entspricht. Über die genauere Definition der Teilbarkeit sei verwiesen auf P., § 1. Ein Produkt aus irgendwelchen Primteilern heißt Divisor. Zwei

Divisoren heißen äquivalent, wenn ihr Quotient gleich einer Funktion des Körpers K ist.

2. Einteilung der Primteiler in zwei Arten. Die zugeordneten Funktionen.

Will man unter Benutzung dieser Primteiler eine Funktion R des Körpers K in Primteiler zerlegen, so stößt man auf eine Schwierigkeit. Es zeigt sich nämlich, daß jede Funktion R unendlich viele Primteiler dieser Art enthält. Um diese Schwierigkeit zu heben, kann man so verfahren, daß man die Primteiler in zwei Arten einteilt und nur die der einen Art für die Zerlegung benutzt. Wie die Einteilung vorzunehmen ist, dafür liefert uns die geometrische Anschauung einen Fingerzeig. Wir fragen uns, was entspricht einem Primteiler $\mathfrak{P}$ auf einer den Körper K darstellenden Fläche $F(x, y, z) = 0$? Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Es werden x, y, z für $\mathfrak{P} = 0$ alle drei konstant. Dann entspricht dem Primteiler $\mathfrak{P}$ auf der Fläche F ein Punkt.

2. Es werden x, y, z für $\mathfrak{P} = 0$ nicht alle drei konstant, dann entspricht dem Primteiler $\mathfrak{P}$ auf der Fläche F eine Kurve. Berücksichtigt man nur die Primteiler, denen auf der Fläche F eine Kurve entspricht, so ist jede Funktion R aus K in eine endliche Zahl von Primteilern zerlegbar. Aber geometrische Betrachtungen und die analytischen Untersuchungen zeigen, daß die Einteilung der Primteiler in solche, denen eine Kurve, und in solche, denen ein Punkt von F entspricht, nicht ohne Ausnahme zweckmäßig ist. Es ist besser, eine etwas andere Einteilung zu wählen.

Zu dieser Einteilung kommen wir, wenn wir die Stellen des Körpers K betrachten oder genauer die Stellen einer den Körper darstellenden Fläche F. Es sei x_0, y_0, z_0 ein Punkt der Fläche F. Dann lassen sich zwei Größen u, v des Körpers K so finden, daß $x - x_0, y - y_0, z - z_0$ sich darstellen lassen als gewöhnliche Potenzreihen von u, v, die für $u = v = 0$ verschwinden.

$$(1.) \quad x - x_0 = p_1(u, v), \quad y - y_0 = p_2(u, v), \quad z - z_0 = p_3(u, v),$$

und eine endliche Zahl solcher Darstellungen liefert alle Stellen x, y, z der Fläche F, die in der Nähe der Stelle x_0, y_0, z_0 liegen. Ist eine der Größen x_0, y_0, z_0 unendlich groß, z. B. x_0, so ist unter $x - x_0$ zu verstehen $\frac{1}{x}$. Ist x_0, y_0, z_0 ein gewöhnlicher Punkt der Fläche F, so genügt

eine solche Darstellung. Wir unterscheiden zwischen *Punkten* und *Stellen.* Wir sagen, durch die Entwicklung (1.) wird eine *Stelle* S von F mit ihrer Umgebung definiert. Unter dem *Punkte* x_0, y_0, z_0 und seiner Umgebung verstehen wir dagegen die Gesamtheit aller Stellen und ihrer Umgebungen, die uns alle Punkte der Fläche F liefern, die in der Umgebung von x_0, y_0, z_0 liegen.

Mit Hilfe von (1.) läßt sich für die Umgebung von S jede Funktion R aus K als Quotient zweier gewöhnlichen Potenzreihen von u, v darstellen. Ist der Nenner eine Einheit für die Stelle $u = v = 0$, so wird R natürlich als gewöhnliche Potenzreihe von u, v darstellbar. Der Zähler von R sei $P(u, v)$. Es sei $P(u, v)$ für $u = v = 0$ gleich Null; es verschwinde also R an der Stelle S. Nach dem *Weierstraß*schen Vorbereitungssatze läßt sich $P(u, v)$ darstellen in der Form

$$p(u, v) \cdot E(u, v),$$

wo E eine Einheit für die Stelle (0,0) ist, und wo $p(u, v)$ eine ganze rationale Funktion von v ist, deren Koeffizienten gewöhnliche Potenzreihen von u sind. Der Koeffizient der höchsten Potenz von v kann gleich 1 angenommen werden. Die anderen Koeffizienten verschwinden für $u = 0$. Die Funktion von $p(u, v)$ kann zerlegbar sein in Faktoren, die wieder ganze rationale Funktionen von v sind mit gewöhnlichen Potenzreihen von u als Koeffizienten. Es sei p in dieser Weise zerlegt, und zwar so, daß die einzelnen Faktoren nicht mehr in Faktoren derselben Art zerlegbar sind, etwa

$$p = k_1^{a_1} k_2^{a_2} \cdots .$$

Setzen wir $k_1 = 0$, so wird $p = 0$ und also auch R. Es wird andererseits durch die Gleichung $k_1 = 0$ eine Gleichung zwischen u und v festgesetzt; es geht also der Körper K über in einen Körper $\mathfrak{P}$ einer Veränderlichen, und zwar in einen algebraischen. Denn er ist ja auch definiert durch $R = 0$. Während aber durch $R = 0$ mehrere Körper einer Veränderlichen definiert sein können, ist durch $k_1 = 0$ nur einer definiert. Ist umgekehrt eine Funktion Q aus K durch $\mathfrak{P}$ teilbar, nimmt sie also für $\mathfrak{P} = 0$ den Wert Null an, und stellen wir Q in der Umgebung von S mit Hilfe von (1.) in der Form

$$Q = \frac{q(u, v)}{q_1(u, v)}$$

dar, wo q und q_1 gewöhnliche Potenzreihen von u, v sind, so ist q durch k_1 teilbar. Jeder der Faktoren k_i von p definiert in dieser Weise einen Primteiler $\mathfrak{P}$. Es kann sehr wohl eintreten, daß verschiedene der Faktoren k_i denselben Primteiler definieren. Es mögen etwa k_1, k_2 und k_3 den Primteiler $\mathfrak{P}$ definieren. Wir nennen dann das Produkt $k_1 k_2 k_3$ die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{P}$ für die Stelle S. Eine solche zugeordnete Funktion wird nicht wesentlich geändert, wenn man sie mit einer Einheit für die Stelle $u = v = 0$ multipliziert. Wir bezeichnen die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{P}$ auch wohl mit $Z(\mathfrak{P})$ unter Angabe der Stelle, zu der diese zugeordnete Funktion gehört. Will man die zugeordnete Funktion eines Primteilers $\mathfrak{P}$ für eine Stelle S bestimmen, so hat man eine Funktion R, die für $\mathfrak{P} = 0$ verschwindet, in der Umgebung von S mit Hilfe von (1.) durch u, v darzustellen. Dann muß man den Zähler p in Faktoren $k_1, k_2, \ldots$ zerlegen und zusehen, ob einer oder mehrere der Faktoren $k_1, k_2, \ldots$, gleich Null gesetzt, den Primteiler $\mathfrak{P}$ definieren oder nicht. Definiert keiner der Faktoren k den Primteiler $\mathfrak{P}$, so setzen wir die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{P}$ gleich 1. Ist die zugeordnete Funktion eines Primteilers für die Stelle S von 1 verschieden, so sagen wir, der Primteiler geht durch die Stelle S.

Die Einteilung der Primteiler in zwei Arten geschieht jetzt zweckmäßig in der Art, daß man sie einteilt in solche, die wenigstens an einer Stelle eine von 1 verschiedene zugeordnete Funktion haben, und in solche, die das nicht haben. Die ersten sollen Primteiler erster, die zweiten Primteiler zweiter Art heißen. Den Primteilern zweiter Art entspricht geometrisch auf der Fläche F immer eine Stelle, und zwar eine gewöhnliche oder eine singuläre. Einem Primteiler erster Art entspricht auf der Fläche F im allgemeinen eine Kurve, mitunter aber auch nur eine Stelle. Diese Stelle ist dann aber immer singulär. Es entspricht dies ganz der geometrischen Auffassung, daß man sich in den singulären Punkten einer Fläche Kurven zu einem Punkte kondensiert denkt. Wir wollen dieser Anschauung folgen und Primteiler erster Art, denen eine Stelle auf der Fläche F entspricht, auch als Kurven von F bezeichnen. Wir können dann die Begriffe Primteiler erster Art in bezug auf eine Fläche F und Kurve der Fläche F als gleichbedeutend ansehen und ohne weiteres den einen für den anderen setzen.

Es gilt der Satz, jede Funktion R aus K läßt sich auf eine und nur eine Art in eine endliche Zahl von Primteilern erster Art zerlegen. Die Primteiler zweiter Art, die in R enthalten sind, sind durch die erster Art mitbestimmt, indem jeder Primteiler erster Art unendlich viele Primteiler zweiter Art, jeden in einer ganz bestimmten Potenz, enthält. Genaueres darüber am Schluß der nächsten Nummer.

Diese Einteilung der Primteiler ist wesentlich abhängig von der Wahl der drei Größen x, y, z oder der darstellenden Fläche F. Wählen wir andere drei Größen, etwa ξ, η, ζ, und die auch den Körper darstellende Fläche Φ mit der Gleichung $\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0$, so können Primteiler von der ersten Art sein, die vorher von der zweiten waren, und umgekehrt. Geometrisch heißt das, bei der birationalen Transformation der Fläche F in die Fläche Φ kann einer Kurve von F eine Stelle von Φ entsprechen und umgekehrt. Hierbei sind, wie wir eben festgesetzt haben, die Primteiler erster Art in bezug auf F, denen eine Stelle von F entspricht, zu den Kurven von F zu rechnen. Diese Primteiler sind analytisch leicht durch ihre zugeordneten Funktionen zu definieren, geometrisch dürfte das nicht leicht sein, vor allem, da sie wohl zu unterscheiden sind von den Primteilern zweiter Art in bezug auf F, denen eine singuläre Stelle von F entspricht.

Man nennt diejenigen Primteiler erster (zweiter) Art in bezug auf F, die in bezug auf Φ von der zweiten (ersten) Art sind, *ausgezeichnete Primteiler für die Transformation.* Man nennt ferner die Primteiler, die überhaupt bei irgendeiner Transformation aus Primteilern erster Art zu solchen zweiter Art werden können, oder umgekehrt, *ausgezeichnete Primteiler des Körpers K.* Ferner nennt man diejenigen Primteiler erster Art in bezug auf eine Fläche F, die bei *irgendeiner* birationalen Transformation in solche zweiter Art übergehen können, *ausgezeichnete Primteiler erster Art von F* oder *ausgezeichnete Kurven von F.*

Die Primteiler sind bei allen birationalen Transformationen invariant. Sie sind ja definiert als algebraische Körper einer Veränderlichen und sind also ganz unabhängig davon, ob man drei Größen x, y, z oder drei andere Größen ξ, η, ζ zur Darstellung der Funktionen des Körpers K benutzt. Das, was sich ändert beim Übergang von x, y, z zu ξ, η, ζ ist, daß bei der Zerlegung der Funktionen aus K in Primteiler zum

Teil andere Primteiler benutzt werden als vorher. Einige Primteiler, die vorher als Primteiler erster Art ausdrücklich bei der Zerlegung angegeben werden mußten, sind zu Primteilern zweiter Art geworden und werden nun nicht mehr besonders angegeben, und umgekehrt. Jede Funktion aus K enthält genau dieselben (unendlich vielen) Primteiler, ob man nun x, y, z oder ξ, η, ζ zur Darstellung der Funktion benutzt. Da wir aber festgesetzt haben, daß bei der Zerlegung nur die Primteiler erster Art in bezug auf die einmal ausgewählten Größen angegeben werden sollen, so sind im allgemeinen nicht dieselben Primteiler bei der Zerlegung anzugeben.

Die Zahl der Schnittpunkte zweier Kurven $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ der Fläche F oder, was dasselbe ist, zweier Primteiler erster Art in bezug auf F bezeichnen wir mit $(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2)$. Diese Zahl kann unter Benutzung der zugeordneten Funktionen auch bei beliebigen Singularitäten definiert werden (Vgl. C., S. 260). Sind ferner

$$\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{P}_1^{\alpha_1}\mathfrak{P}_2^{\alpha_2}\cdots\mathfrak{P}_\mu^{\alpha_\mu}, \quad \mathfrak{T}_2 = \mathfrak{Q}_1^{\beta_1}\mathfrak{Q}_2^{\beta_2}\cdots\mathfrak{Q}_\nu^{\beta_\nu}$$

aus den Primteilern $\mathfrak{P}_i$ und $\mathfrak{Q}_i$ erster Art in bezug auf F beliebig zusammengesetzte, aber zunächst teilerfremde Divisoren, so definieren wir — auch für den Fall, daß unter den Exponenten α_i, β_i negative vorkommen — als Zahl der Schnittpunkte von $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$

$$(2.) \qquad (\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2) = \Sigma \alpha_i \beta_k (\mathfrak{P}_i, \mathfrak{Q}_k).$$

Der Wert von $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2)$ ändert sich nicht, wenn man $\mathfrak{T}_1$ oder $\mathfrak{T}_2$ oder $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ durch ihnen äquivalente Divisoren ersetzt. Haben $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ einen gemeinsamen Faktor, so können wir hiernach $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2)$ definieren, indem wir etwa $\mathfrak{T}_1$ durch einen ihm äquivalenten Divisor $\mathfrak{T}_1'$ ersetzen, der zu $\mathfrak{T}_2$ teilerfremd ist, also setzen $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2) = (\mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2)$. Dieser Wert ist dann unabhängig von der Wahl von $\mathfrak{T}_1'$.

3. Die Primteiler zweiter Art.

Wir müssen noch darauf eingehen, wie die Primteiler zweiter Art in bezug auf eine Fläche F zu definieren sind. Einmal kann man durch eine passende birationale Transformation zu einer Fläche Φ übergehen, in bezug auf die der Primteiler von der ersten Art ist, und ihn dann als Kurve dieser Fläche oder durch eine seiner zugeordneten Funktionen definieren. Aber es ist für das folgende wichtig zu wissen, wie ein Primteiler

zweiter Art in bezug auf F zu definieren ist, ohne eine birationale Transformation zu Hilfe zu nehmen.

Wir werden sehen, daß zu jeder Stelle von F unendlich viele Primteiler zweiter Art gehören. Es sei S eine Stelle von F; x, y, z mögen an dieser Stelle die Werte x_0, y_0, z_0 haben. Die Stelle und ihre Umgebung sei wieder definiert durch die Gleichungen (1.). Wir wollen zeigen, wie ein Primteiler zweiter Art $\mathfrak{b}$ zu definieren ist, der zu dieser Stelle gehört, und der so beschaffen ist, daß eine gegebene Funktion R aus K für $\mathfrak{b}=0$ nicht konstant wird. Die Funktion R darf nicht ganz beliebig gegeben sein. Es sei, durch die Hilfsgrößen u, v für die Umgebung der Stelle S dargestellt,

$$R = \frac{P(u, v)}{Q(u, v)}.$$

Da für $\mathfrak{b}=0$ sowohl u wie v gleich Null werden, so wird R für $\mathfrak{b}=0$ sicher konstant, wenn eine der Potenzreihen P und Q eine Einheit ist oder wenn beide Einheiten sind. Sind aber P und Q beide keine Einheiten, so läßt sich $\mathfrak{b}$ immer so bestimmen, daß für $\mathfrak{b}=0$ die Funktion R nicht konstant wird. Vorausgesetzt ist dabei natürlich, daß P und Q nicht etwa einen gemeinsamen Teiler in der Umgebung der Stelle S haben.

Es sei hier nur angegeben, wie $\mathfrak{b}$ zu bestimmen ist. Über den Beweis sei verwiesen auf C., Nr. V. Es bedeute k eine willkürliche Konstante. Nach dem *Weierstraß*schen Vorbereitungssatze können wir setzen

$$P - kQ = g(u, v) \cdot e(u, v),$$

wo e eine Einheit für die Stelle S ist, und wo g eine ganze rationale Funktion von v ist, deren Koeffizienten gewöhnliche Potenzreihen von u sind. Eine der Wurzeln der Gleichung $g(u, v)=0$, die für $u=0$ verschwinden, sei nach steigenden Potenzen von u entwickelt

$$(3.) \qquad v = v_1 = a_1 u^{\frac{\beta_1}{\alpha}} + a_2 u^{\frac{\beta_2}{\alpha}} + \cdots + a_\nu u^{\frac{\beta_\nu}{\alpha}} + \cdots .$$

Es sei in dieser Entwicklung a_ν der erste Koeffizient, der von k abhängt. Es sei α so gewählt, daß es möglichst klein ist, und doch so, daß die $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\nu$ ganze Zahlen sind, während nicht notwendig auch β_i ganz zu sein braucht, wenn $i > \nu$. Wir stellen uns die Funktionen aus K für die Umgebung der Stelle S durch die Hilfsgrößen u, v dar und setzen dann

$$(4.) \quad v = v(u, t) = a_1 u^{\frac{\beta_1}{\alpha}} + a_2 u^{\frac{\beta_2}{\alpha}} + \cdots + a_{\nu-1} u^{\frac{\beta_{\nu-1}}{\alpha}} + t u^{\frac{\beta_\nu}{\alpha}},$$

welcher Ausdruck in leicht ersichtlicher Weise aus (3.) hervorgeht. Wir ordnen ferner nach Potenzen von u und setzen dann $u = 0$. Es gehen dann alle Funktionen aus K über in konstante Größen oder in rationale Funktionen von t. Wir erhalten so einen algebraischen Körper $\mathfrak{b}$ der einen Veränderlichen t und damit einen Primteiler erster Stufe. Dieser Primteiler hat die Eigenschaft, daß für $\mathfrak{b} = 0$ die Funktion R nicht konstant wird. Ebenso sind die anderen etwa noch vorhandenen Wurzeln von $g(u, v) = 0$ zu behandeln. Man erhält so alle zur Stelle S gehörenden Primteiler zweiter Art, die, gleich Null gesetzt, die Funktion R nicht konstant machen.

Es sei noch bemerkt, daß t selbst nicht eine Funktion des Körpers $\mathfrak{b}$ zu sein braucht, daß aber immer eine Potenz von t, etwa t^ε, dem Körper angehört. Diese Zahl ε ergibt sich auf folgende Weise. Die Reihe (3.) schreite nach ganzen Potenzen von $u^{\frac{1}{\alpha'}}$ fort, dann ist $\varepsilon = \frac{\alpha'}{\alpha}$ (Vgl. C., Nr. XI).

Wenn wir in $P(u, v) - kQ(u, v)$ für v die Entwicklung (4.) einsetzen und nach Potenzen von u ordnen, so sei der Koeffizient des Anfangsgliedes

$$r(t).$$

Da die Gleichung $P(u, v) - kQ(u, v) = 0$ die Wurzel (3.) hat und die Entwicklung (4.) aus (3.) in der angegebenen Weise hervorgeht, so ist $r(t)$ teilbar durch $t^\varepsilon - a_\nu^\varepsilon$, wo ε die eben definierte Zahl ist. Nun kann aber die Gleichung $P - kQ = 0$ noch andere Wurzeln haben, die alle *denselben* Primteiler $\mathfrak{b}$ definieren, deren Entwicklung also genau so beginnt wie (3.), die sich von (3.) erst im Koeffizienten von $u^{\frac{\beta_\nu}{\alpha}}$ oder in späteren Gliedern unterscheiden. Im ganzen möge $P - kQ = 0$ m solcher Wurzeln haben. Die Koeffizienten von $u^{\frac{\beta_\nu}{\alpha}}$ seien $a_\nu, a_\nu', a_\nu'', \ldots$. Diese Größen müssen alle von k abhängen, wenn die betreffenden Wurzeln, wie wir annehmen, alle denselben Primteiler $\mathfrak{b}$ definieren. Dann ist $r(t)$ durch $(t^\varepsilon - a_\nu^\varepsilon)(t^\varepsilon - a_\nu'^\varepsilon) \cdots$ $\cdots (t^\varepsilon - a_\nu^{(m-1)\varepsilon})$ teilbar. Die anderen Nullstellen von $r(t)$ sind von k unabhängig und sind also dieselben für alle Werte von k. Daraus ergibt sich, daß für $\mathfrak{b} = 0$

$$\frac{P - kQ}{Q} = \frac{P}{Q} - k = \frac{(t^\varepsilon - a_\nu^\varepsilon)(t^\varepsilon - a_\nu'^\varepsilon) \cdots (t^\varepsilon - a_\nu^{(m-1)\varepsilon})}{q(t)},$$

wo $q(t)$ eine *ganze* rationale Funktion von t^ε ist, deren Grad höchstens gleich m ist. Es wird also für $\mathfrak{b}=0$ die Funktion $\frac{P}{Q}-k$ eine rationale Funktion von t^ε von der Ordnung m.

Dieses Ergebnis brauchen wir später in der Umkehrung. Nämlich:

Es werde für $\mathfrak{b}=0$ die Funktion $R=\frac{P}{Q}$ eine rationale Funktion der Ordnung m in t^ε. Dann hat die Gleichung

$$P-kQ=0$$

m Wurzeln, deren Entwicklung mit der Entwicklung (3.) von v_1 in den ersten $\nu-1$ Gliedern vollkommen, im ν-ten Glied im Exponenten von u übereinstimmt, und bei denen der Koeffizient des ν-ten Gliedes von k wirklich abhängt.

Ein Primteiler zweiter Art in bezug auf eine Fläche F gehört also immer zu einer ganz bestimmten Stelle der Fläche F, wie hier der Primteiler $\mathfrak{b}$ zu der Stelle S. Wir können daher die Stelle S auch als Stelle $\mathfrak{b}$ bezeichnen, was wir im folgenden öfter tun werden. Es gehören aber, wie aus der Herleitung folgt, zu jeder Stelle S unendlich viele Primteiler zweiter Art.

Im Körper $\mathfrak{b}$ gibt es immer Größen, die von t wirklich abhängen. Eine solche sei ξ. Dann können zwei Größen η, ζ immer noch so bestimmt werden, daß alle Funktionen aus K als rationale Funktionen von ξ, η, ζ dargestellt werden können. Da für $\mathfrak{b}=0$ die Größen ξ, η, ζ nicht alle drei konstant werden, so ist der Primteiler $\mathfrak{b}$ als Primteiler in bezug auf ξ, η, ζ von der ersten Art, während er in bezug auf x, y, z von der zweiten ist. Es ist also jeder Primteiler zweiter Art ein ausgezeichneter Primteiler. Demnach enthält jeder Körper unendlich viele ausgezeichnete Primteiler. Es enthält auch jede Fläche unendlich viele ausgezeichnete Primteiler, aber ob sie unendlich viele von diesen als *Kurven* enthalten kann, ob also eine Fläche unendlich viele ausgezeichnete Kurven enthält, ist eine Frage, auf die wir später erst eingehen. Wir ersehen ferner, daß jeder Primteiler zweiter Art vom Geschlechte Null ist. Es sind ja alle Größen des Primteilers rationale Funktionen einer Größe t.

Ein Primteiler zweiter Art wird definiert durch eine Gleichung von der Form (4.). Zu der Funktion $v(u,t)$ in (4.) gehören noch $\alpha-1$ kon-

jugierte, die dadurch entstehen, daß v einen oder mehrere Umläufe um den Nullpunkt macht. Wir bezeichnen diese α Funktionen mit $v_1, v_2, \dots v_\alpha$ und bilden

$$(5.) \qquad B(u, v; t) \equiv (v - v_1)(v - v_2) \cdots (v - v_\alpha).$$

$B(u, v; t)$ ist eine ganze rationale Funktion von u und v. Da durch jede ihrer Wurzeln der Primteiler $\mathfrak{b}$ definiert werden kann, so nennen wir sie die *Eichfunktion* von $\mathfrak{b}$. Der Grad von $B(u, v; t)$ in u und v ist (α, β_ν). Wir nennen (α, β_ν) kurz den Grad der Eichfunktion von $\mathfrak{b}$. Dieser Grad hat eine wichtige Bedeutung, wie wir sehen werden.

Hier können wir auch noch kurz die Teilbarkeit eines Primteilers erster Art durch einen zweiter Art definieren. Es sei $\mathfrak{P}$ irgendein Primteiler erster Art. Seine zugeordnete Funktion für die Stelle S sei $p(u, v)$. Ist sie gleich 1, so ist $\mathfrak{P}$ durch keinen zur Stelle S gehörenden Primteiler zweiter Art teilbar. Ist $p(u, v)$ von 1 verschieden, also nach unseren Festsetzungen auch keine Einheit für die Stelle $u = v = 0$, so setze man in $p(u, v)$, um die in ihm enthaltene Potenz von $\mathfrak{b}$ zu bestimmen, für u die den Primteiler $\mathfrak{b}$ definierende Entwicklung (4.) ein. Man ordne dann nach Potenzen von u. Enthält das Anfangsglied die γ-te Potenz von $u^{\frac{1}{\alpha}}$, so ist $\mathfrak{P}$ durch $\mathfrak{b}^\gamma$ teilbar.

4. Die ausgezeichneten Primteiler einer Transformation.

Wir betrachten den Übergang von der Fläche F zu der Fläche Φ genauer. Es seien $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots \mathfrak{A}_m$ diejenigen Primteiler erster Art in bezug auf F, die in Primteiler zweiter Art in bezug auf Φ übergehen. Wir bezeichnen sie als Primteiler zweiter Art in bezug auf Φ mit $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots \mathfrak{a}_m$. Es seien ferner $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots \mathfrak{B}_n$ diejenigen Primteiler erster Art in bezug auf Φ, die in bezug auf F von der zweiten Art sind. Sie sollen als Primteiler in bezug auf F mit $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \dots \mathfrak{b}_n$ bezeichnet werden. Die Primteiler $\mathfrak{a}_i$ brauchen nicht alle zu verschiedenen Stellen von Φ zu gehören und ebenso die $\mathfrak{b}_i$ nicht alle zu verschiedenen Stellen von F.

Nach der vorigen Nummer hat die Bestimmung etwa der Primteiler $\mathfrak{b}_i$ in folgender Weise zu geschehen. Man zerlege die Größen ξ, η, ζ in Primteiler erster Art in bezug auf F. Es werde etwa

$$\xi = \frac{A_0}{A},$$

wo $\mathcal{A}_0$ und $\mathcal{A}$ *ganze* Divisoren sein sollen. Man suche die Stellen auf, wo $\mathcal{A}_0$ und $\mathcal{A}$ sich schneiden. Eine solche Stelle bei S. Stellen wir ξ in der Umgebung von S durch die Hilfsgrößen u, v der Stelle S dar, so wird ξ der Quotient zweier Potenzreihen von u, v, die beide keine Einheiten für die Stelle $u = v = 0$ sind. Es gibt also nach der vorigen Nummer mindestens einen Primteiler zweiter Art $\mathfrak{b}$ in bezug auf F von der Art, daß für $\mathfrak{b} = 0$ die Größe ξ nicht konstant wird. Das heißt aber, der Primteiler $\mathfrak{b}$ ist in bezug auf ξ, η, ζ sicher nicht von der zweiten Art. Nach dem in der vorigen Nummer angegebenen Verfahren sind *alle* ausgezeichneten Primteiler $\mathfrak{b}_i$ zu bestimmen, soweit sie zur Stelle S gehören und soweit sie, gleich Null gesetzt, ξ nicht zu einer Konstanten machen. Die anderen Stellen, wo $\mathcal{A}_0$ und $\mathcal{A}$ sich treffen, sind ebenso zu behandeln, und schließlich sind η und ζ zu behandeln wie ξ.

Damit sind dann alle diejenigen für die Transformation ausgezeichneten Primteiler zweiter Art in bezug auf F bestimmt, denen auf der Fläche Φ eine wirkliche Kurve entspricht, aber nicht die, denen eine in einen Punkt kondensierte Kurve entspricht. Man hat also noch zuzusehen, ob nicht einige oder auch alle der — nur in endlicher Zahl vorhandenen — Primteiler erster Art in bezug auf Φ, denen auf der Fläche Φ eine Stelle entspricht, bei der Transformation übergehen in Primteiler zweiter Art in bezug auf F.

Ganz ebenso sind die Primteiler $\mathfrak{a}_i$ zu bestimmen.

Wir bezeichnen die Eichfunktion von $\mathfrak{a}_i$ mit $A_i(u, v; t)$, deren Grad mit (α_i', α_i'') und die Eichfunktion von $\mathfrak{b}_i$ mit $B_i(u, v; t)$ und deren Grad mit (β_i', β_i'').

Wir bezeichnen ferner das Produkt aller in einem Primteiler $\mathfrak{P}$ erster Art in bezug auf F aufgehenden Primteiler $\mathfrak{b}_i$ mit $s\mathfrak{P}$, und entsprechend das Produkt aller in einem Primteiler $\mathfrak{P}'$ erster Art in bezug auf Φ aufgehenden Primteiler $\mathfrak{a}_i$ mit $s\mathfrak{P}'$.

Primteiler und Divisoren in bezug auf Φ wollen wir mit einem Akzent versehen. Nur die Primteiler $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{B}_i$ wollen wir ohne Akzent lassen.

Es bestehen dann folgende Transformationsformeln

$$(6.) \qquad \frac{\mathfrak{A}_i}{s\mathfrak{A}_i} = \mathfrak{a}_i, \quad \frac{\mathfrak{B}_i}{s\mathfrak{B}_i} = \mathfrak{b}_i, \quad \frac{\mathfrak{P}}{s\mathfrak{P}} = \frac{\mathfrak{P}'}{s\mathfrak{P}'}.$$

Hier bedeutet $\mathfrak{P}$ einen von den ausgezeichneten Primteilern der Trans-

formation verschiedenen Primteiler und $\mathfrak{P}'$ denselben Primteiler in bezug auf Φ. Die Transformationsformeln drücken einfach die Tatsache aus, daß bei Zugrundelegung der Fläche F die Primteiler $\mathfrak{b}_i$ keine selbständige Rolle spielen, sondern durch die anderen Primteiler mitgegeben sind, da sie in diesen enthalten sind, daß sie aber selbständig werden, sobald wir zu Φ übergehen, und daß Entsprechendes gilt für die Primteiler $\mathfrak{a}_i$. Oder auch: die Primteiler $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ sind im wesentlichen einander gleich. Sie unterscheiden sich nur darin, daß der Primteiler $\mathfrak{P}$ die Primteiler $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots \mathfrak{b}_n$ enthält, die $\mathfrak{P}'$ nicht enthält, und daß $\mathfrak{P}'$ die Primteiler $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_m$ enthält, die $\mathfrak{P}$ nicht enthält. Nehmen wir also von $\mathfrak{P}$ alle in ihm enthaltenen Primteiler $\mathfrak{b}_i$ und von $\mathfrak{P}'$ alle in ihm enthaltenen Primteiler $\mathfrak{a}_i$ fort, so werden die beiden Primteiler einander gleich, d. h., es besteht die dritte der Gleichungen (6.). Ebenso kann man sich die ersten beiden der Gleichungen (5.) verdeutlichen.

Aus der dritten der Formeln (6.) folgt

$$\mathfrak{P} = \frac{\mathfrak{P}'}{s\,\mathfrak{P}'}\, s\,\mathfrak{P};$$

es sei

$$s\,\mathfrak{P} = \mathfrak{b}_1^{\beta_1}\,\mathfrak{b}_2^{\beta_2} \cdots \mathfrak{b}_n^{\beta_n},$$

dann wird mit Benutzung der zweiten der Formeln (6.)

$$\mathfrak{P} = \frac{\mathfrak{P}'}{s\,\mathfrak{P}'}\left(\frac{\mathfrak{B}_1}{s\,\mathfrak{B}_1}\right)^{\beta_1}\left(\frac{\mathfrak{B}_2}{s\,\mathfrak{B}_2}\right)^{\beta_2} \cdots \left(\frac{\mathfrak{B}_n}{s\,\mathfrak{B}_n}\right)^{\beta_n}.$$

Wir können also setzen

$$\mathfrak{P} = \frac{\mathfrak{Q}'}{s\,\mathfrak{Q}'}.$$

Der Kurve $\mathfrak{P}$ von F entspricht also eine Kurve $\mathfrak{Q}'$ auf Φ. Diese Kurve enthält als Bestandteile ein oder mehreremale eine Kurve $\mathfrak{B}_i$, wenn $\mathfrak{P}$ durch die Stelle hindurchgeht, zu der der Primteiler $\mathfrak{b}_i$ gehört. Es ist aber $\mathfrak{Q}'$ zu dividieren mit $s\,\mathfrak{Q}'$. Es entsteht die Frage nach der Größe $s\,\mathfrak{Q}'$. Wir setzen

$$s\,\mathfrak{Q}' = \mathfrak{a}_1^{\sigma_1}\,\mathfrak{a}_2^{\sigma_2} \cdots \mathfrak{a}_m^{\sigma_m}$$

und fragen uns, wie groß die σ_i sind. Eine Zahl σ z. B. σ_1 ist nur dann von Null verschieden, wenn die Kurve $\mathfrak{Q}'$ durch die Stelle $\mathfrak{a}_1$ von Φ geht, und es wird die Zahl σ_1 um so größer sein, je öfter $\mathfrak{Q}'$ durch diese Stelle geht. Es seien die Stellen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_\varrho$ dieselben. Dann gehen die Punkte der Kurven $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_\varrho$ von F in die Stelle $\mathfrak{a}_1$ über und nur diese. Soll

also $\mathfrak{Q}'$ durch die Stelle $\mathfrak{a}_1$ gehen, so muß die Kurve $\mathfrak{P}$ die Kurven $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_\varrho$ schneiden. Und man wird sagen können, je größer die Zahl der Schnittpunkte von $\mathfrak{P}$ mit den Kurven $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_\varrho$ ist, desto größer wird σ_1 und auch $\sigma_2, \ldots \sigma_\varrho$ sein.

Um die genauen Werte der σ_i angeben zu können, müssen wir erst einige Bezeichnungen einführen.

Es seien $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{a}_k$ zwei Primteiler, die zur selben Stelle gehören. Die Eichfunktionen seien $A_i(u, v; t)$, $A_k(u, v; t)$. Die Gleichungen $A_i(u, v; t_1) = 0$, $A_k(u, v; t_2) = 0$ fassen wir auf als Gleichungen zwischen den kartesischen Koordinaten u und v und haben dann die Gleichungen zweier Kurven. Die Zahl der Schnittpunkte dieser Kurven bei beliebigem t_1 und t_2 im Punkte $u = v = 0$ bezeichnen wir mit

$$[i, k]'.$$

Hierbei soll nicht ausgeschlossen sein, daß $i = k$ ist. Es ist dann natürlich $t_1 \neq t_2$ anzunehmen. Gehören $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{a}_k$ zu verschiedenen Stellen, so soll

$$[i, k]' = 0$$

gesetzt werden. Die Definition der Größen $[i, k]'$ läßt sich auch noch in anderer Weise aussprechen. Die Funktion $A_i(u, v; t) = 0$ ist nämlich genau durch die $[i, k]'$-te Potenz von $\mathfrak{a}_k$ teilbar, was sich ohne weiteres aus der oben gegebenen Definition der Teilbarkeit durch einen Primteiler zweiter Art ergibt.

Ganz entsprechend sind mit Hilfe der Eichfunktionen B_i, die Größen $[i, k]$ zu definieren.

Mit den so definierten Größen können wir unsere Frage beantworten.

Wir sprechen das Resultat gleich ganz allgemein aus.

Es sei $\mathfrak{P}$ irgendein Divisor erster Art in bezug auf x, y, z. Es soll nicht ausgeschlossen sein, daß er Primteiler $\mathfrak{A}_i$ enthält. Wird beim Übergang zu ξ, η, ζ

$$(7.) \qquad \mathfrak{P} = \frac{\mathfrak{Q}'}{\mathfrak{a}_1^{\sigma_1}\mathfrak{a}_2^{\sigma_2}\cdots\mathfrak{a}_m^{\sigma_m}} = \frac{\mathfrak{Q}'}{\mathfrak{q}'},$$

wo $\mathfrak{Q}'$ ein Divisor erster Art in bezug auf ξ, η, ζ ist, so ist

$$(8.) \quad \sigma_i = (\mathfrak{P}, \mathfrak{A}_1)[1, i] + (\mathfrak{P}, \mathfrak{A}_2)[2, i] + \cdots + (\mathfrak{P}, \mathfrak{A}_m)[m, i].$$

Ist ferner $\mathfrak{P}'$ irgendein Divisor erster Art in bezug auf ξ, η, ζ, und wird beim Übergang zu x, y, z

$$(7^a.) \qquad \mathfrak{P}' = \frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{b}_1^{\tau_1}\mathfrak{b}_2^{\tau_2}\cdots\mathfrak{b}_n^{\tau_n}} = \frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{q}},$$

wo Ω ein Divisor erster Art in bezug auf x, y, z ist, so ist

$$(8^{a}.) \quad \tau_i = (\mathfrak{P}', \mathfrak{B}_1)[1, i]' + (\mathfrak{P}', \mathfrak{B}_2)[2, i]' + \cdots + (\mathfrak{P}', \mathfrak{B}_n)[n, i]'.$$

Den Beweis gebe ich in der folgenden Nummer. Hier seien noch einige wichtige Eigenschaften der Größen $[i, k]$ und $[i, k]'$ gegeben.

Die Systeme $([i, k])$ und $([i, k]')$ sind quadratisch und symmetrisch. Das erste enthält n^2, das zweite m^2 Größen. Da $[i, k]$ immer dann gleich Null ist, wenn die Primteiler $\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_k$ zu verschiedenen Stellen gehören, so zerfällt das System der $[i, k]$ in so viele quadratische Einzelsysteme, als es Stellen gibt, zu denen Primteiler $\mathfrak{b}_i$ gehören. Die Determinante $|[i, k]|$ ist daher auch als Produkt von so vielen Determinanten darstellbar, als es Stellen gibt, zu denen Primteiler $\mathfrak{b}_i$ gehören. Von diesen zu einer Stelle gehörenden Determinanten läßt sich zeigen (vgl. C., S. 286 und folgende), daß sie von Null verschieden sind. Damit ist dann auch gezeigt, daß die Determinante aller $[i, k]$ von Null verschieden ist. Entsprechendes gilt für das System der Größen $[i, k]'$.

Das reziproke System zu $([i, k])$ sei bezeichnet mit $((i, k))$ und das von $([i, k]')$ mit $((i, k)')$. Wir setzen dann

$$(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k) = -(i, k)', \quad (\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_k) = -(i, k).$$

Die so definierten Zahlen $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k)$ und $(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_k)$ sind nicht immer ganzzahlig. Ferner ist immer $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k) = 0$, wenn $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{a}_k$ zu verschiedenen Stellen gehören, und ebenso $(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_k)$, wenn $\mathfrak{b}_i$ und $\mathfrak{b}_k$ nicht zu derselben Stelle gehören. Das folgt einfach daraus, daß die $[i, k]'$ und $[i, k]$ diese Eigenschaft haben. Wir setzen ferner, wenn $\mathfrak{P}$ ein Primteiler erster Art in bezug auf F und $\mathfrak{P}'$ einer erster Art in bezug auf Φ ist,

$$(\mathfrak{P}, \mathfrak{b}_i) = 0, \quad (\mathfrak{P}', \mathfrak{a}_i) = 0.$$

Sind jetzt $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ irgend zwei Divisoren, die Primteiler erster Art in bezug auf F und Primteiler $\mathfrak{b}_i$ enthalten, etwa

$$\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{P}_1^{\alpha_1} \mathfrak{P}_2^{\alpha_2} \cdots \mathfrak{b}_1^{\gamma_1} \mathfrak{b}_2^{\gamma_2} \cdots, \quad \mathfrak{T}_2 = \mathfrak{P}_1^{\beta_1} \mathfrak{P}_2^{\beta_2} \cdots \mathfrak{b}_1^{\delta_1} \mathfrak{b}_2^{\delta_2} \cdots,$$

so definieren wir ganz entsprechend der Formel (2.)

$$(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2) = \Sigma \alpha_i \beta_k (\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_k) + \Sigma \gamma_i \delta_k (\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_k).$$

Ganz entsprechend ist $(\mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2')$ zu definieren, wenn $\mathfrak{T}_1'$ und $\mathfrak{T}_2'$ außer Primteilern erster Art in bezug auf Φ auch Primteiler $\mathfrak{a}_i$ enthalten.

Es gilt dann der Satz:

Sind $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ zwei Divisoren, die aus Primteilern erster Art in bezug auf F und aus den Primteilern $\mathfrak{b}_i$ beliebig zusammengesetzt sind,

und sind $\mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2'$ die Divisoren, in die $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ durch Anwendung der Transformationsformeln (6.) übergehen, so ist

$$(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2) = (\mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2').$$

Dieser Satz ist in einfachen Fällen geometrisch leicht einzusehen. Im übrigen verweise ich wegen des Beweises auf C.

Eine Reihe von Formeln, die sich aus diesem Satze ergeben, sei angegeben, da wir sie später brauchen.

Wir setzen

$$(9.) \qquad \begin{aligned} s\mathfrak{A}_i &= \mathfrak{b}_1^{\alpha_{i1}} \mathfrak{b}_2^{\alpha_{i2}} \cdots \mathfrak{b}_n^{\alpha_{in}}, \\ s\mathfrak{B}_i &= \mathfrak{a}_1^{\beta_{i1}} \mathfrak{a}_2^{\beta_{i2}} \cdots \mathfrak{a}_m^{\beta_{im}}. \end{aligned}$$

Nach den Transformationsformeln (6.) wird

$$\left(\frac{\mathfrak{A}_i}{s\mathfrak{A}_i}, \mathfrak{b}_k\right) = \left(\mathfrak{a}_i, \frac{\mathfrak{B}_k}{s\mathfrak{B}_k}\right)$$

oder

$$(s\mathfrak{A}_i, \mathfrak{b}_k) = (\mathfrak{a}_i, s\mathfrak{B}_k)$$

oder

$$(10.) \quad \begin{aligned} \alpha_{i1}(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_k) + \alpha_{i2}(\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_k) + \cdots + \alpha_{in}(\mathfrak{b}_n, \mathfrak{b}_k) &= \beta_{k1}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_i) \\ + \beta_{k2}(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_i) + \cdots + \beta_{km}(\mathfrak{a}_m, \mathfrak{a}_i). &\quad (i=1, \ldots m;\ k=1, \ldots n) \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen sich auch als Gleichung zwischen Systemen in der einfachen Form schreiben

$$((\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_k))(\alpha) = (\bar{\beta})((\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k)),$$

wenn wir mit $(\bar{\beta})$ das System bezeichnen, das aus (β) durch Vertauschen der Zeilen mit den Kolonnen hervorgeht.

5. Beweise einiger Sätze der vorigen Nummer.

Einige der in der vorigen Nummer angegebenen Sätze sollen in dieser bewiesen werden.

Wir betrachten die Gleichung (7ª.)

$$\mathfrak{P}' = \frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{q}}.$$

Es sei S eine Stelle, zu der einer oder mehrere der Primteiler $\mathfrak{b}_i$ gehören, etwa die Primteiler

$$\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots \mathfrak{b}_\nu.$$

Die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{Q}$ für die Stelle S sei

$$Z(\mathfrak{Q}) = Q(u, v).$$

Wir sehen von dem trivialen Fall ab, wo Q eine Einheit für die Stelle S ist. Es ist dann Ω durch *jeden* der Primteiler $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \dots \mathfrak{b}_\nu$, die zur Stelle S gehören, teilbar. Es sind also die Größen τ_i für $i = 1, \dots \nu$ in (7ª.) von Null verschieden.

Da die Determinante der ν^2 Größen $[i, k]$ $(i, k = 1, 2, \dots \nu)$ von Null verschieden ist, so lassen sich Größen $m_1, m_2, \dots m_\nu$ so bestimmen, daß

$$m_1[i, 1]' + m_2[i, 2]' + \cdots + m_\nu[i, \nu]' = \tau_i. \qquad (i=1, 2, \dots \nu) \tag{11.}$$

Da die $[i, k]$ und die τ_i ganze Zahlen sind, so sind die m_i rationale Zahlen. Wie wir sehen werden, sind sie sogar *ganze positive* Zahlen. Wir lassen das aber vorläufig noch unentschieden. Der Hauptnenner der m_i sei m. Wir betrachten dann statt des Primteilers $\mathfrak{P}'$ den Divisor $\mathfrak{P}'^m$. Es geht Ω in Ω^m und $\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{q}^m$ über. Die Größen τ_i werden zu $m\tau_i$. Wir setzen

$$m\tau_i = \tau_i' \quad \text{und} \quad mm_i = m_i'.$$

Es bestehen die Gleichungen

$$m_1'[i, 1] + m_2'[i, 2] + \cdots + m_\nu'[i, \nu] = \tau_i', \qquad (i=1, 2, \dots \nu) \tag{12.}$$

und hierin sind die m_i' *ganze* Zahlen. Daß sie positiv sind, weisen wir noch nach.

Wir setzen

$$B = B_1^{m_1}(t_1)\, B_2^{m_2}(t_2) \cdots B_\nu^{m_\nu}(t_\nu).$$

Da B_k genau durch $\mathfrak{b}_i^{[i,k]}$ teilbar ist, so ist B genau durch $\mathfrak{b}_1'^{\iota_1}\mathfrak{b}_2'^{\iota_2} \cdots \mathfrak{b}_\nu'^{\iota_\nu}$ teilbar. Es enthält also die Funktion

$$\frac{Q}{B} \tag{13.}$$

keinen der Primteiler $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \dots \mathfrak{b}_\nu$, auch nicht in negativer Potenz. Es sei eine Wurzel von $B_1(t) = 0$

$$v_1 = a_1 u^{\frac{\delta_1}{\beta_1''}} + a_2 u^{\frac{\delta_2}{\beta_1''}} + \cdots + t u^{\frac{\beta_1'}{\beta_1''}}. \tag{14.}$$

Wollen wir sehen, was aus einer Funktion für $\mathfrak{b}_1 = 0$ wird, so haben wir sie erst in der Umgebung der Stelle S durch u, v darzustellen, dann für v die Entwicklung (14.) einzusetzen, nach Potenzen von u zu ordnen und schließlich $u = 0$ zu setzen. Es wird nun (vgl. C., Nr. XI), nach Potenzen von u geordnet,

$$B_1(u, v_1; t_1) = b_1 u^{\frac{[1,1]}{\beta_1''}} (t^{\varepsilon_1} - t_1^{\varepsilon_1}) + \cdots,$$

wo b_1 eine von u und t unabhängige Größe ist. Die Zahl ε_1 hat die Bedeutung, daß für $\mathfrak{b}_1 = 0$ alle Funktionen des Körpers übergehen in rationale Funktionen von t^{ε_1}, und daß t^{ε_1} dem Körper $\mathfrak{b}_1$ oder $\mathfrak{B}_1$ angehört, während für $\varepsilon_1 > 1$ t selbst diesem Körper nicht angehört. Wir setzen

$$t^{\varepsilon_1} = w, \quad t_1^{\varepsilon_1} = w_1.$$

Eine Stelle des Körpers $\mathfrak{B}_1$ oder der Kurve $\mathfrak{B}_1$ ist dann vollkommen bestimmt durch einen Wert von w, und umgekehrt gehört zu jedem Wert von w eine Stelle von $\mathfrak{B}_1$.

Es wird ferner

$$B_i(v_1, u; t_i) = h_i(w)\, u^{\frac{[i,1]}{\beta_i''}} + \cdots, \qquad (i=2,3,\ldots\nu)$$

wo $h_i(w)$ entweder von w unabhängig ist oder von t_i oder auch von beiden. (Vgl. C., S. 281 und 282.)

Es werde ferner, nach Potenzen von u geordnet,

$$Q(u, v_1) = u^{\frac{\tau_1}{\beta_1''}} q(w) + \cdots.$$

Es wird dann für $\mathfrak{b}_1 = 0$

$$\frac{\mathfrak{Q}^m}{B} = \frac{q^m(w)}{b_1 (w - w_1)^{m_1'} h(w)}, \tag{15.}$$

wo gesetzt ist

$$h_2^{m_2'}(w) h_3^{m_3'}(w) \cdots h_\nu^{m_\nu'}(w) = h(w).$$

In dieser Gleichung sind $q(w)$ und $h(w)$ von w_1 ganz unabhängig. Es kann sich also $(w - w_1)^{m_1'}$ nicht fortheben. Es wird daher für $\mathfrak{b}_1 = 0$ die Funktion $\frac{Q}{B}$ eine von w wirklich abhängige Größe, wenn $m_1' \neq 0$.

Daraus aber ergibt sich nach dem in Nr. 3 angegebenen Satze über die Primteiler zweiter Art folgendes. Die Gleichung

$$Q^m - kB = 0 \tag{16.}$$

muß für beliebiges k $|m_1'|$ Wurzeln v haben, die alle für $u = 0$ verschwinden, und deren Entwicklungen nach Potenzen von u mit der Entwicklung (14.) von v_1 in den ersten Gliedern der Entwicklung von v_1 vollkommen übereinstimmen und im letzten Gliede dieser Entwicklung bis auf den Koeffizienten t, deren Entwicklungen also die Gestalt haben

$$v^{(i)} = v_1 + (k_i - t) u^{\frac{\beta_1'}{\beta_1''}} + \text{höheren Potenzen von } u. \qquad (i=1,2,\ldots|m_1'|)$$

In diesen Entwicklungen sind ferner die Größen k_i von k wirklich abhängig. Diese Wurzeln liefern mit ihren konjugierten zusammen $|m_1'|\beta_1''$

Wurzeln der Gleichung (16.) Hieraus ergibt sich noch eine Eigenschaft, die wir gleich benutzen werden. Ist $\bar{v}$ eine beliebige Potenzreihe, die nach ganzen oder gebrochenen positiven Potenzen von v fortschreitet, deren Koeffizienten von t und k unabhängig sind, so sind bei beliebigem k und t die Differenzen

$$\bar{v} - v^{(i)} \quad \text{und} \quad \bar{v} - v_1$$

durch dieselbe Potenz von u teilbar.

Wir müssen aber noch genauer angeben, in welchem Sinne wir von Wurzeln der Gleichung (16.) sprechen. Wir wissen vorläufig nicht, ob nicht unter den m_i' negative Zahlen vorkommen. Es könnte also B eine gebrochene rationale Funktion von u, v sein. Es sei

$$B = \frac{g_1}{g_2},$$

wo g_1 und g_2 ganz sein sollen. Die Funktion Q wird im allgemeinen nicht eine rationale Funktion von u, v, sondern eine gewöhnliche Potenzreihe von u, v. Es ist also auch $g_2 Q - k g_1$ eine gewöhnliche Potenzreihe von u, v, und wir können sie nach dem *Weierstraß*schen Vorbereitungssatze in der Form annehmen

$$g_2 Q^m - k g_1 = E \cdot G(u, v),$$

wo E eine Einheit für die Stelle $u = v = 0$ ist, und wo G eine ganze rationale Funktion von v ist, deren Koeffizienten gewöhnliche Potenzreihen von u sind. Die Gleichung (16.) ist zu ersetzen durch die Gleichung

$$G(u, v) = 0.$$

Diese Gleichung hat also $|m_1'|\beta_1''$ Wurzeln der angegebenen Beschaffenheit.

Für die Primteiler $\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3, \ldots \mathfrak{b}_\nu$ gilt aber dasselbe wie für den Primteiler $\mathfrak{b}_1$. Es muß also die Gleichung $G(u, v) = 0$ im ganzen *mindestens*

$$|m_1'|\beta_1'' + |m_2'|\beta_2'' + \cdots + |m_\nu'|\beta_\nu'' = M$$

Wurzeln haben, die mit den Wurzeln der Gleichungen $B_i = 0 (i = 1, 2, \ldots \nu)$ oder mit den Wurzeln von $g_1 g_2 = 0$ in der angegebenen Weise übereinstimmen. Diese Wurzeln seien bezeichnet mit

$$v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots v^{(M)}.$$

Wir können dann setzen

$$(17.) \quad g_2 Q^m - k g_1 = E \cdot G = H(v - v^{(1)})(v - v^{(2)}) \cdots (v - v^{(M)}),$$

wo H jedenfalls eine *ganze* Funktion für die Stelle $u = v = 0$ ist.

Setzen wir hierin für v irgendeine Potenzreihe $\bar{v}$ von u, deren Koeffizienten von t und k nicht abhängen, so wird nach der eben gemachten Bemerkung bei beliebigem t und k das Produkt

$$(v - v^{(1)})(v - v^{(2)}) \cdots (v - v^{(M)})$$

durch dieselbe Potenz von u teilbar wie

$$g_1 g_2 .$$

Nehmen wir aber für die Potenzreihe $\bar{v}$ eine Wurzel von $Q = 0$, so wird die linke Seite von (17.) gleich $-kg_1(\bar{v})$, und die rechte Seite wird nach dem eben Gesagten mindestens durch dieselbe Potenz von u teilbar wie $g_1(\bar{v}) \cdot g_2(\bar{v})$. Das aber widerspricht sich, wenn nicht g_2 eine Einheit für die Stelle $u = v = 0$ ist und ebenso H. Dies aber kann nur der Fall sein, wenn alle m_i' positiv sind. Damit ist bewiesen, daß keines der m_i' negativ ist. Wir können g_2 gleich 1 annehmen, also $g_1 = B$, und die Gleichung (17.) schreiben

$$Q^m - kB = E \cdot G(u, v) = E_1(v - v^{(1)})(v - v^{(2)}) \cdots (v - v^{(M)}),$$

wo E_1 eine Einheit ist.

Für $v = v_1$ werde

$$Q^m - kB = g(w) u^{\frac{\tau_1}{\beta_1'}} + \cdots,$$

so daß für $\mathfrak{b}_1 = 0$ unter Benutzung von (15.)

$$\left[\frac{Q^m - kB}{B}\right]_{\mathfrak{b}_1 = 0} = \left[\frac{Q^m}{B}\right]_{\mathfrak{b}_1 = 0} - k = \frac{g(w)}{b_1 (w - w_1)^{m_1} h(w)}.$$

Eine genauere Untersuchung, auf die ich hier verzichten will, zeigt, daß die rationale Funktion $\frac{g(w)}{h(w)}$ von w eine *ganze* Funktion ist, deren Grad für nicht spezielles k gleich m_1' ist. Es kommt das daher, daß die Entwicklungen der Wurzeln von $G(u, v) = 0$ und von $B = 0$ paarweise in den Anfangsgliedern, soweit diese nicht von den t und von k abhängen, übereinstimmen. Es wird also für $\mathfrak{b}_1 = 0$

$$\left[\frac{\Omega}{B}\right]_{\mathfrak{b}_1 = 0} = \left[\frac{Q}{B}\right]_{\mathfrak{b}_1 = 0} = \frac{q_1(w)}{(w - w_1)^{m_1}},$$

wo q_1 eine ganze rationale Funktion von w ist, deren Ordnung höchstens gleich m_1' ist.

Entsprechendes gilt, wenn wir einen der anderen Primteiler $\mathfrak{b}_i$ $(i = 2, 3, \ldots \nu)$ gleich Null setzen.

Mit diesem Ergebnis gelingt es, für die Zahl m_1' eine geometrische Bedeutung zu gewinnen.

Es sei R eine Funktion des Körpers. Sie sei in Primteiler erster Art in bezug auf ξ, η, ζ zerlegt

$$R = \mathfrak{P}_1'^{p_1} \mathfrak{P}_2'^{p_2} \cdots \mathfrak{P}_r'^{p_r}, \tag{18.}$$

wo die p_i ganze positive oder negative Zahlen sind. Die Funktion R sei so gewählt, daß sie für $\mathfrak{b}_1 = 0$ in eine von w wirklich abhängige Funktion übergeht. Es darf dann keiner der Primteiler $\mathfrak{P}_i'$ mit $\mathfrak{B}_1$ identisch sein. Wir nehmen ferner an, daß keiner der Primteiler $\mathfrak{P}_i'$ mit einem der Primteiler $\mathfrak{B}_2, \ldots \mathfrak{B}_\nu$ identisch ist. Beim Übergang zu x, y, z werde

$$\mathfrak{P}_i' = \frac{\mathfrak{Q}_i}{\mathfrak{q}_i},$$

wo $\mathfrak{Q}_i$ ein Divisor erster und $\mathfrak{q}_i$ einer zweiter Art in bezug auf x, y, z ist. Es wird dann

$$R = \mathfrak{Q}_1^{p_1} \mathfrak{Q}_2^{p_2} \cdots \mathfrak{Q}_r^{p_r},$$

da die Primteiler zweiter Art sich fortheben müssen.

Wir bilden aus den Funktionen $B_1, B_2, \ldots B_\nu$ ein Produkt $B^{(i)}$, das durch dieselben Potenzen von $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots \mathfrak{b}_\nu$ teilbar ist wie $\mathfrak{q}_i$ oder, was dasselbe ist, wie $\mathfrak{Q}_i$.

Das Produkt

$$B^{(1)p_1} B^{(2)p_2} \cdots B^{(r)p_r} \tag{19.}$$

enthält dann die Divisoren $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots \mathfrak{b}_\nu$ in derselben Potenz wie $\mathfrak{Q}_1^{p_1} \mathfrak{Q}_2^{p_2} \cdots \mathfrak{Q}_r^{p_r} = R$, also in der nullten. Das aber ist nur möglich, wenn das Produkt (19.) identisch gleich 1 ist. Wir können daher schreiben

$$R = \left(\frac{\mathfrak{Q}_1}{B^{(1)}}\right)^{p_1} \left(\frac{\mathfrak{Q}_2}{B^{(2)}}\right)^{p_2} \cdots \left(\frac{\mathfrak{Q}_r}{B^{(r)}}\right)^{p_r}.$$

Nach dem eben Bewiesenen geht $\frac{\mathfrak{Q}_i}{B^{(i)}}$ für $\mathfrak{b}_1 = 0$ über in eine rationale Funktion der Hilfsgröße w, und diese Funktion hat die Form

$$\frac{q_i(w)}{(w - w_1)^{p_{i1}}},$$

wo q_i eine ganze rationale Funktion von w ist, deren Grad höchstens gleich p_{i1} ist.

Da das Produkt (19.) den Wert 1 hat, so ist auch das Produkt

$$(w - w_1)^{p_1 p_{11} + p_2 p_{21} + \cdots + p_r p_{r1}} = 1.$$

Es wird also die Funktion R für $\mathfrak{b}_1 = 0$ zu

$$\bar{R} \equiv q_1^{p_1}(w)\, q_2^{p_2}(w) \cdots q_r^{p_r}(w),$$

gleich einer Funktion des Körpers $\mathfrak{b}_1$ oder $\mathfrak{B}_1$. Diese Funktion wird Null an den Stellen, wo der Zähler von R die Kurve $\mathfrak{B}_1$ trifft, und unendlich da, wo der Nenner von R die Kurve $\mathfrak{B}_1$ schneidet. Es wird aber $\bar{R}$ Null oder unendlich für die Nullstellen der ganzen Funktionen q_i. Jede solche Nullstelle definiert aber eine eindeutig bestimmte Stelle der Kurve $\mathfrak{B}_1$. Da nun z. B. q_1 aus dem Primteiler $\mathfrak{P}_1'$ entsteht, so schließen wir, die Nullstellen von $q_1(w)$ sind diejenigen Stellen, wo $\mathfrak{P}_1'$ die Kurve $\mathfrak{B}_1$ schneidet. Hierbei werden wir den Wert $w = \infty$ so oft mitrechnen müssen, daß die Gesamtzahl der Nullstellen von $q_1(w)$ gleich p_{11} wird. Ist nämlich etwa $p_1 > 0$ und sind die Primteiler $\mathfrak{P}_2', \mathfrak{P}_3', \ldots$ so gewählt, daß sie die Kurve $\mathfrak{B}_1$ nicht in dem Punkte schneiden, für den $w = \infty$ ist, so werden die Funktionen $q_2, q_3, \ldots q_r$ genau von den Ordnungen $p_{21}, p_{31}, \ldots p_{r1}$ sein. Ist dann q_1 von geringerer Ordnung als der p_{11}-ten, so wird R Null für $w = \infty$, und diese Nullstelle kann nur einem Schnittpunkt von $\mathfrak{B}_1$ mit $\mathfrak{P}_1'$ ihr Vorhandensein verdanken.

Es ergeben sich also die Gleichungen

$$p_{i1} = (\mathfrak{P}_i', \mathfrak{B}_1),$$

woraus sich auch ergibt, daß die p_{i1} *ganze* Zahlen sind.

Wenden wir dieses Ergebnis auf den vorher für sich betrachteten Primteiler $\mathfrak{P}'$ oder den Divisor $\mathfrak{P}'^m$ an, so bestehen die Gleichungen

$$m_i' = m_i m = (\mathfrak{P}'^m, \mathfrak{B}_i) = m(\mathfrak{P}', \mathfrak{B}_i),$$

oder also

$$m_i = (\mathfrak{P}', \mathfrak{B}_i). \tag{20.}$$

Wir finden also, wie angegeben, eine einfache geometrische Deutung für die Größen m_i' und m_i, und außerdem ergibt sich, daß die Zahlen m_i ganze Zahlen sind.

Die Gleichungen (11.) gehen mit Benutzung von (20.) über in die Gleichungen

$$\tau_i = [i, 1]'(\mathfrak{P}', \mathfrak{B}_1) + [i, 2]'(\mathfrak{P}_1', \mathfrak{B}_2) + \cdots + [i, n]'(\mathfrak{P}', \mathfrak{B}_n), \quad {\scriptstyle (i=1, 2, \ldots \nu)}$$

und das sind die ersten ν der Gleichungen (10.) der vorigen Nummer. Die anderen $n - \nu$ werden ebenso bewiesen, indem man die anderen Stellen betrachtet, zu denen Primteiler $\mathfrak{b}_i$ gehören. Die Gleichungen (8.) sind dann nach Analogie zu bilden.

Die Gleichungen (8.) und (10.) sind zunächst nur bewiesen für den Fall, daß $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}$ von den $\mathfrak{B}_i$ und $\mathfrak{A}_i$ verschiedene *Primteiler* sind. Sie gelten aber auch, wenn man unter $\mathfrak{P}$ einen *Divisor* erster Art in bezug auf x, y, z und unter $\mathfrak{P}'$ einen Divisor erster Art in bezug auf ξ, η, ζ versteht. Es sei z. B.

$$\mathfrak{P}' = \mathfrak{T}_1^{\prime\prime_1}\mathfrak{T}_2^{\prime\prime_2}\cdots\mathfrak{T}_\nu^{\prime\prime_\nu},$$

wo wir zunächst noch annehmen müssen, daß die $\mathfrak{T}_i'$ Primteiler sind, die von den $\mathfrak{B}_i$ verschieden sind. Es werde bei der Transformation

$$\mathfrak{T}_i' = \frac{\mathfrak{T}_i}{\mathfrak{b}_1^{\tau_{i1}}\mathfrak{b}_2^{\tau_{i2}}\cdots\mathfrak{b}_n^{\tau_{in}}},\quad \mathfrak{P}' = \frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{b}_1^{\tau_1}\mathfrak{b}_2^{\tau_2}\cdots\mathfrak{b}_n^{\tau_n}},$$

so daß also

$$\tau_k = \gamma_1\tau_{1k} + \gamma_2\tau_{2k} + \cdots + \gamma_n\tau_{nk}. \tag{21.}$$

Für die Primteiler $\mathfrak{T}_i'$ gelten aber die Gleichungen (10.). Also ist

$$\tau_{ik} = [k, 1]'(\mathfrak{T}_i', \mathfrak{B}_1) + [k, 2]'(\mathfrak{T}_i', \mathfrak{B}_2) + \cdots + [k, n]'(\mathfrak{T}_i', \mathfrak{B}_n).$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit γ_i und summieren über i und bedenken, daß

$$\gamma_1(\mathfrak{T}_1', \mathfrak{B}_l) + \gamma_2(\mathfrak{T}_2', \mathfrak{B}_l) + \cdots + \gamma_\nu(\mathfrak{T}_\nu', \mathfrak{B}_l) = (\mathfrak{T}_1^{\prime\prime_1}\mathfrak{T}_2^{\prime\prime_2}\cdots\mathfrak{T}_\nu^{\prime\prime_\nu}, \mathfrak{B}_l) = (\mathfrak{P}', \mathfrak{B}_l),$$

und benutzen wir ferner die Gleichungen (21.), so bekommen wir genau die Gleichungen (10).

Schließlich können wir uns auch noch von der Beschränkung frei machen, daß $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}$ von den Primteilern $\mathfrak{B}_i$, $\mathfrak{A}_i$ verschieden sein sollen, oder wenn sie Divisoren sind, keinen dieser Primteiler enthalten sollen. Enthält z. B. $\mathfrak{P}'$ einen oder auch mehrere der Primteiler $\mathfrak{B}_i$, so bestimmen wir einfach irgendeinen — nicht notwendig ganzen — Divisor $\mathfrak{P}''$, der zu $\mathfrak{P}'$ äquivalent ist, und der keinen der Primteiler $\mathfrak{B}_i$ enthält. Solch einen Divisor gibt es immer. Ist bei der Transformation

$$\mathfrak{P}'' = \frac{\mathfrak{Q}_1}{\mathfrak{q}_1} = \frac{\mathfrak{Q}_1}{\mathfrak{b}_1^{\tau_1'}\mathfrak{b}_2^{\tau_2'}\cdots\mathfrak{b}_n^{\tau_n'}},$$

so wird

$$\frac{\mathfrak{P}''}{\mathfrak{P}'} = \frac{\mathfrak{Q}_1}{\mathfrak{Q}}\cdot\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{q}_1}.$$

Es ist aber $\frac{\mathfrak{P}''}{\mathfrak{P}'}$ eine Funktion des Körpers. Es müssen daher die Primteiler zweiter Art sich fortheben, so daß

$$\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}$$

wird und $\tau_i' = \tau_i$. Da ferner wegen der Äquivalenz von $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}''$

$$(\mathfrak{P}'', \mathfrak{B}_i) = (\mathfrak{P}', \mathfrak{B}_i)$$

ist, so bestehen die Gleichungen (10.) auch in diesem Falle.

6. Ein wichtiger Spezialfall.

Es sei Ω irgendein Divisor erster Art in bezug auf x, y, z. Es sei

$$s\Omega = \mathfrak{b}_1^{\tau_1}\mathfrak{b}_2^{\tau_2}\cdots\mathfrak{b}_n^{\tau_n}.$$

Wir können, wie oben, n Größen $m_1, m_2, \ldots m_n$ bestimmen, die den Gleichungen (11.) genügen. Man könnte nun auf den Gedanken kommen, daß gerade so wie oben die Größen m_i *ganze* Zahlen sein müssen. Das ist aber nicht der Fall, wie man schon an einfachen Beispielen sehen kann. In dem obigen Satze ist nämlich Ω nicht ein beliebiger Divisor. Er ist vielmehr von der Art, daß $\frac{\Omega}{s\Omega}$ bei der Transformation übergeht in einen Divisor, der nur Primteiler erster Art in bezug auf ξ, η, ζ enthält. Es gibt aber einen Fall, wo der Divisor Ω beliebig gewählt werden darf, und dieser Fall ist besonders wichtig. Er tritt immer dann ein, wenn das geometrische Geschlecht oder eins der mehrfachen Geschlechte der Fläche von Null verschieden ist. In diesem Falle sind nämlich, wie in Nr. 8 gezeigt werden wird, die Größen $s\mathfrak{A}_i$ und $s\mathfrak{B}_i$ alle gleich 1, oder mit anderen Worten, es geht dann keine der für die Transformation singulären Kurven durch einen Fundamentalpunkt der Transformation. Die Transformationsformeln (6.) in Nr. 4 lauten also einfacher

(22.) $$\mathfrak{A}_i = \mathfrak{a}_i, \quad \mathfrak{B}_i = \mathfrak{b}_i.$$

Es seien diese Bedingungen erfüllt, und es sei Ω ein beliebiger Divisor erster Art in bezug auf x, y, z. Es sei

$$s\Omega = \mathfrak{b}_1^{\tau_1}\mathfrak{b}_2^{\tau_2}\cdots\mathfrak{b}_n^{\tau_n}.$$

Wir wollen zeigen, daß die durch die Gleichungen

(23.) $$m_1[1, i]' + m_2[2, i]' + \cdots + m_n[n, i]' = \tau_i \qquad (i=1, 2, \ldots n)$$

bestimmten Größen m_i unter den gemachten Annahmen positive ganze Zahlen sind. Es sei für den Übergang zu ξ, η, ζ

$$\Omega = \frac{\Omega'}{\mathfrak{q}'} = \frac{\Omega'}{\mathfrak{a}_1^{\gamma_1}\mathfrak{a}_2^{\gamma_2}\cdots\mathfrak{a}_m^{\gamma_m}},$$

wo Ω' ein Divisor erster und $\mathfrak{q}'$ einer zweiter Art in bezug auf ξ, η, ζ ist.

Setzen wir

$$\Omega \mathfrak{A}_1^{\tau_1} \mathfrak{A}_2^{\tau_2} \cdots \mathfrak{A}_m^{\tau_m} = \bar{\Omega},$$

so ist auch, da die $\mathfrak{A}_k$ durch keinen der Primteiler $\mathfrak{b}_i$ teilbar sein sollen,

$$s\bar{\Omega} = \mathfrak{b}_1^{\tau_1} \mathfrak{b}_2^{\tau_2} \cdots \mathfrak{b}_n^{\tau_n}.$$

Der Divisor $\dfrac{\bar{\Omega}}{s\bar{\Omega}}$ ist nun aber von der Art, daß er bei der Transformation in einen Divisor erster Art in bezug auf x, y, z übergeht. Bestimmen wir daher Größen $m_1, m_2, \ldots m_n$ durch die Gleichungen (23.), so sind die Größen m_i ganze positive Zahlen. Bedenken wir, daß $s\Omega = s\bar{\Omega}$ ist, und daß nach Voraussetzung Ω ein beliebiger Divisor erster Art in bezug auf x, y, z ist, so ist unsere Behauptung erwiesen.

Hieraus ergeben sich einige wichtige Folgerungen.

Wir können den gefundenen Satz auch in folgender Form aussprechen.

Ist Ω ein beliebiger Divisor und ist

$$s\Omega = \mathfrak{b}_1^{\tau_1} \mathfrak{b}_2^{\tau_2} \cdots \mathfrak{b}_n^{\tau_n},$$

so lassen sich die Exponenten τ_i in der Form darstellen

$$\tau_i = g_1[i, 1]' + g_2[i, 2]' + \cdots + g_n[i, n]', \tag{24.}$$

wo die g_i *ganze* Zahlen sind.

Man kann aber immer einen Divisor erster Art in bezug auf ξ, η, ζ — wenn auch im allgemeinen keinen ganzen — finden, der die Primteiler $\mathfrak{B}_i$ in einer beliebig gegebenen Potenz enthält. Durch den Übergang von ξ, η, ζ zu x, y, z erhält man einen Divisor Ω, der die Primteiler $\mathfrak{b}_i$ in der vorgegebenen Vielfachheit enthält. Mit anderen Worten, man kann in (24.) den Größen τ_i durch passende Wahl von Ω beliebige Werte geben. Da sich die Größen g_i aus den Gleichungen (24.) jedesmal als ganze Zahlen ergeben müssen, so folgt, daß die Determinante der $[i, k]'$ gleich ± 1 sein muß.

Wir haben also den Satz:

Ist das geometrische Geschlecht p_g oder eins der mehrfachen Geschlechte größer als Null, so sind die Determinanten der Größen $[i, k]$ und $[i, k]'$ gleich $+1$ oder -1.

Die Determinante der $[i, k]'$ zerfällt in so viele Einzeldeterminanten, wie es Stellen gibt, zu denen Primteiler $\mathfrak{b}_i$ gehören, und ihr Wert ist gleich

dem Produkt dieser Einzeldeterminanten. Da die $[i, k]'$ alle ganzzahlig sind, so folgt, daß auch jede dieser Einzeldeterminanten gleich ± 1 ist, z. B. auch die Determinante der ν^2 Größen $[i, k]'$ $(i, k = 1, 2, \ldots \nu)$. Ist im besonderen $\nu = 1$, gehört also zu der Stelle S nur *ein* Primteiler $\mathfrak{b}_1$, so wird $[1,1]' = 1$. Das negative Zeichen kann hier nicht stehen, da die Größen $[i, k]'$ ihrer geometrischen Bedeutung nach nicht negativ sind. Allgemeiner können wir sagen: gehören die Primteiler $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_k$ jeder für sich allein zu einer Stelle, so ist

$$[i, i] = 1, \quad [k, k]' = 1.$$

Da die Determinante der Systeme $[i, k]$ und $[i, k]'$ gleich ± 1 ist, so folgt, daß ihre reziproken Systeme ganzzahlig sind. Es sind also auch die Größen $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k)$, $(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_k)$ ganzzahlig. Im besonderen ist, wenn die Primteiler $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_k$ jeder für sich allein zu einer Stelle gehören,

$$(25.) \qquad (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_i) = -1, \quad (\mathfrak{b}_k, \mathfrak{b}_k) = -1.$$

Da in dem hier betrachteten Falle die einfachen Transformationsformeln (22.) gelten, so ist

$$(26.) \qquad (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k) = (\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_k), \quad (\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_k) = (\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_k).$$

Sind im besonderen $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{B}_k$ Primteiler, die jeder bei der Transformation in einen Punkt übergehen, in den keiner der anderen Primteiler $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ übergeht, so ist

$$(27.) \qquad (\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_i) = -1, \quad (\mathfrak{B}_k, \mathfrak{B}_k) = -1.$$

Ferner ist immer

$$(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_k) = 0 \quad \text{und} \quad (\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_k) = 0,$$

wenn die Primteiler $\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_k$ beim Übergang von x, y, z zu ξ, η, ζ in *verschiedene* Punkte übergehen, und wenn die Primteiler $\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_k$ beim Übergang von x, y, z zu ξ, η, ζ in *verschiedene* Punkte übergehen.

Für $i \neq k$ ergibt sich auch aus (26.), daß die Größen $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k)$ und $(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_k)$ ganze *nicht negative* Zahlen sind, da die Größen $(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_k)$ als Zahl der Schnittpunkte der Kurven $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{A}_k$ und $(\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_k)$ als Zahl der Schnittpunkte von $\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_k$ sicher ganzzahlig und nicht negativ sind. Dann müssen die Größen $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_i) = (\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_i)$ und $(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_i) = (\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_i)$ *negativ* sein. Denn wäre z. B. $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1) > 0$, so könnten nicht die Gleichungen

$$\varepsilon_i = [i, 1](\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1) + [i, 2](\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) + \cdots + [i, m](\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_m), \quad (i=1, 2, \ldots m)$$

wo $\varepsilon_1 = -1$ und im übrigen $\varepsilon_i = 0$ ist, bestehen, da in ihnen außer $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1)$ sicher alle Größen nicht negativ sind. Diese Gleichungen bestehen aber; es sind ja die Definitionsgleichungen für die $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k)$.

7. Die kanonische Klasse und ihr Verhalten bei birationalen Transformationen.

Es sei S irgendeine Stelle und u, v zwei Hilfsgrößen, mit denen die Umgebung von S dargestellt werden kann. Die Funktionaldeterminante

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

ist eine gewöhnliche Potenzreihe von u, v. Diese kann eine Einheit für die Stelle $u = v = 0$ sein und wird es im allgemeinen sein. Es kann aber auch der Fall eintreten, daß diese Potenzreihe für $u = v = 0$ verschwindet. Dann gibt es einen Divisor $\mathfrak{Q}$ von der Art, daß die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{Q}$ für die Stelle S mit $D(u,v)$ bis auf eine Einheit für die Stelle S als Faktor übereinstimmt.

Es gibt nun einen Divisor, der mit $\mathfrak{Z}_{xy}\mathfrak{L}^{-2}\mathfrak{M}^{-2}$ bezeichnet sei, wo $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}$ die Nenner von x und y sein sollen, von der Art, daß für *jede* Stelle S die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{Z}_{xy}\mathfrak{L}^{-2}\mathfrak{M}^{-2}$ bis auf einen Faktor, der eine Einheit für die Stelle S ist, übereinstimmt mit $D(u,v)$. Der Divisor $\mathfrak{Z}_{xy}$ heißt Verzweigungsdivisor in bezug auf xy. Es besteht also für die Umgebung jeder Stelle S die Gleichung

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = Z\left(\frac{\mathfrak{Z}_{xy}}{\mathfrak{L}^2\mathfrak{M}^2}\right)\cdot E, \tag{28.}$$

wo E eine Einheit für die Stelle S ist, und wo $Z(\mathfrak{Z}_{xy}\mathfrak{L}^{-2}\mathfrak{M}^{-2})$ die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{Z}_{xy}\mathfrak{L}^{-2}\mathfrak{M}^{-2}$ für die Stelle S sein soll. Man kann den Divisor direkt durch diese Bedingung definieren. Zu den in $\mathfrak{Z}_{xy}$ enthaltenen Primteilern gehören *alle* Primteiler erster Art in bezug auf F, deren Projektion auf die xy-Ebene ein Punkt ist, die also entweder in einem (singulären) Punkt von F kondensiert sind, oder denen eine Parallele zur z-Achse entspricht. Die anderen in $\mathfrak{Z}_{xy}$ enthaltenen Primteiler lassen sich in folgender Art charakterisieren. Es sei $\mathfrak{P}$ ein in $\mathfrak{Z}_{xy}$ enthaltener Primteiler, dessen Projektion auf die xy-Ebene nicht ein Punkt ist. Die Gleichung der Projektion sei $V(x,y) = 0$. Die Funktion V enthält sicher eine der beiden Größen x oder y. Sie enthalte etwa x. Dann lassen

sich nach einem Satze von Herrn *Hensel* alle Funktionen aus K entwickeln nach ganzen Potenzen von V oder einer passend gewählten Potenz von V, etwa $V^{\frac{1}{a}}$, mit Koeffizienten, die algebraische Funktionen von y sind. Ist die ganze Zahl α möglichst klein gewählt, so ist der Primteiler $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{Z}_{xy}$ genau in der $(\alpha-1)$-ten Potenz enthalten. Wegen des Beweises dieses Satzes sehe man die Arbeit von Herrn *Hensel* oder P., § 7. Entsprechend $\mathfrak{Z}_{xy}$ seien $\mathfrak{Z}_{yz}$, $\mathfrak{Z}_{xz}$ mit Benutzung von y, z und x, z definiert. Mit $\mathfrak{R}$ sei der Nenner von z bezeichnet.

Man hat dann die Zerlegungen

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\mathfrak{Z}_{yz}\mathfrak{D}}{\mathfrak{L}^{l-2}\mathfrak{M}^{m}\mathfrak{R}^{n}},\quad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\mathfrak{Z}_{xz}\mathfrak{D}}{\mathfrak{L}^{l}\mathfrak{M}^{m-2}\mathfrak{R}^{n}},\quad \frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\mathfrak{Z}_{xy}\mathfrak{D}}{\mathfrak{L}^{l}\mathfrak{M}^{m}\mathfrak{R}^{n-2}},$$

wo der Divisor $\mathfrak{D}$ jedesmal derselbe ist. Er heißt der Divisor der mehrfachen Kurven von F.

Hiernach sind folgende Divisoren äquivalent

$$\frac{\mathfrak{Z}_{yz}}{\mathfrak{M}^2\mathfrak{R}^2}\sim\frac{\mathfrak{Z}_{xz}}{\mathfrak{L}^2\mathfrak{R}^2}\sim\frac{\mathfrak{Z}_{xy}}{\mathfrak{L}^2\mathfrak{M}^2}\sim\frac{\mathfrak{L}^{l-2}\mathfrak{M}^{m-2}\mathfrak{R}^{n-2}}{\mathfrak{D}}.$$

Sie gehören also alle derselben Klasse an. Diese heißt die kanonische oder Differentialklasse. Sie sei mit $(\mathfrak{K})$ bezeichnet. Die kanonische Klasse, die zur Fläche Φ gehört, sei mit $(\mathfrak{K}')$ bezeichnet. Es liegt nahe zu vermuten, daß $(\mathfrak{K})$ beim Übergang von F zu Φ übergeht in $(\mathfrak{K}')$. Das ist aber nicht der Fall, sondern es gilt folgender Satz:

Es sei (α_i', α_i'') *der Grad der Eichfunktion von* $\mathfrak{a}_i$ *und* (β_i', β_i'') *der Grad der Eichfunktion von* $\mathfrak{b}_i$. *Wir setzen*

$$(29.)\qquad \alpha_i=\alpha_i'+\alpha_i''-1,\qquad \beta_i=\beta_i'+\beta_i''-1,$$

$$(30.)\qquad \mathfrak{a}=\mathfrak{a}_1^{\alpha_1}\mathfrak{a}_2^{\alpha_2}\cdots\mathfrak{a}_m^{\alpha_m},\qquad \mathfrak{b}=\mathfrak{b}_1^{\beta_1}\mathfrak{b}_2^{\beta_2}\cdots\mathfrak{b}_n^{\beta_n}.$$

Dann geht bei der Transformation die Klasse $(\mathfrak{K}\mathfrak{b})$ *über in* $(\mathfrak{K}'\mathfrak{a})$.

Da die Größen $\alpha_i', \alpha_i'', \beta_i', \beta_i''$ mindestens gleich 1 sind, so sind die Größen α_i und β_i mindestens gleich 1.

Der Beweis dieses Satzes zerfällt in zwei Teile. Erst ist zu beweisen, daß man zwei Divisoren $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_1^{\alpha_1}\mathfrak{a}_2^{\alpha_2}\cdots\mathfrak{a}_m^{\alpha_m}$, $\mathfrak{b}=\mathfrak{b}_1^{\beta_1}\mathfrak{b}_2^{\beta_2}\cdots\mathfrak{b}_n^{\beta_n}$ so bestimmen kann, daß die Klassen $(\mathfrak{K}\mathfrak{b})$ und $(\mathfrak{K}'\mathfrak{a})$ durch die Transformation ineinander übergehen. Dieser Beweis wird in der Art geführt, daß man die Gleichung beweist

$$(31.) \qquad \frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)} = \frac{\mathfrak{Z}_{xy}}{\mathfrak{L}^2\mathfrak{M}^2}\,\mathfrak{b}\cdot\frac{\Lambda^2 M^2}{\mathfrak{Z}_{\xi\eta}}\,\mathfrak{a}^{-1}.$$

In dieser Gleichung sind $\mathfrak{Z}_{xy}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}$ die schon früher definierten Größen; Λ und M sind die Nenner von ξ und η. Der Divisor $\mathfrak{Z}_{\xi\eta}$ ist der Verzweigungsdivisor in bezug auf ξ, η. Die Divisoren $\Lambda, M, \mathfrak{Z}_{\xi\eta}$ enthalten nur Primteiler erster Art in bezug auf Φ. Die Gleichung ist folgendermaßen zu verstehen. $\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}$ ist eine Funktion des Körpers K. Wenn man nun in (31.) die Divisoren $\Lambda, M, \mathfrak{Z}_{\xi\eta}, \mathfrak{a}$ durch die Transformationsformeln (6.) verwandelt in Divisoren, die nur Primteiler enthalten in bezug auf x, y, z, so erhält man aus (31.) die Zerlegung der Funktion $\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}$ in Primteiler. Es müssen also dann die Primteiler zweiter Art in bezug auf F sich fortheben.

Der Beweis der Gleichung (31.) ist gegeben in P., § 7, § 8. Ich will ihn hier nicht wiederholen.

Es bleibt noch zu beweisen, daß die Exponenten α_i und β_i die angegebenen Werte $\alpha_i' + \alpha_i'' - 1$ und $\beta_i' + \beta_i'' - 1$ haben, was mir bei der Abfassung von P. entgangen ist.

Der Beweis ist folgender:

Wir betrachten etwa den Primteiler $\mathfrak{b}_1$. Er gehöre zur Stelle S. Es seien wieder mit u, v die Hilfsgrößen bezeichnet, die uns die Stelle S und ihre Umgebung definieren. Die Eichfunktion von $\mathfrak{b}_1$ sei

$$B_1(u, v; t) = \text{Norm}\ (v - b_1 u^{\frac{\lambda_1}{\beta_1''}} - b_2 u^{\frac{\lambda_2}{\beta_1''}} - \cdots - b_{\nu-1} u^{\frac{\lambda_{\nu-1}}{\beta_1''}} - t\, u^{\frac{\beta_1'}{\beta_1''}}).$$

Wir nehmen statt u und v als unabhängige Veränderliche u und t, indem wir setzen

$$(32.) \qquad v = b_1 u^{\frac{\lambda_1}{\beta_1''}} + b_2 u^{\frac{\lambda_2}{\beta_1''}} + \cdots + t\, u^{\frac{\beta_1'}{\beta_1''}}.$$

Da es für die Bestimmung des Exponenten β_1 gleichgültig ist, welche Transformation wir verwenden, wenn nur bei der benutzten Transformation $\mathfrak{b}_1$ in einen Primteiler erster Art übergeht, so können wir durch passende Wahl von ξ, η, ζ die Bestimmung vereinfachen. Für $\mathfrak{b}_1 = 0$ werden alle Funktionen aus K rationale Funktionen von t. Die Größe t selbst braucht

nicht dem Körper K anzugehören, wohl aber gibt es eine Potenz von t, etwa t^ε, die dem Körper K angehört. Wir nehmen nun

(33.) $$\xi = t^\varepsilon, \qquad \eta = u,$$

und wählen ζ irgendwie, jedoch so, daß alle Funktionen des Körpers K rational durch ξ, η, ζ ausdrückbar sind. Die Größe ξ wird für $\mathfrak{b}_1 = 0$ bei dieser Wahl nicht konstant. Es ist also $\mathfrak{b}_1$ in bezug auf ξ, η, ζ von der ersten Art. Wir bezeichnen ihn als Primteiler erster Art wieder mit $\mathfrak{B}_1$.

Es wird in der Umgebung der Stelle S

$$\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)} = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \cdot \frac{D(u,v)}{D(\xi,\eta)}.$$

Es wird nach (32.) und (33.)

$$-\frac{D(\xi,\eta)}{D(u,v)} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)_u = \varepsilon t^{\varepsilon-1}\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)_u = \varepsilon t^{\varepsilon-1} u^{-\frac{\beta_1'}{\beta_1''}}.$$

Hiernach ist $\frac{D(\xi,\eta)}{D(u,v)}$ durch die $(-\beta_1')$-te Potenz von $u^{\frac{1}{\beta_1''}}$ teilbar.

Nehmen wir ferner an, daß $\mathfrak{Z}_{xy}\mathfrak{L}^{-2}\mathfrak{M}^{-2}$ durch $\mathfrak{b}_1^\alpha$ teilbar ist, so ist nach (28.) $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ nach Benutzung von (32.) durch $u^{\frac{\alpha}{\beta_1''}}$ teilbar. Es wird also

$$\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)} = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} : \frac{D(\xi,\eta)}{D(u,v)}$$

nach Benutzung von (32.) teilbar durch $u^{\frac{\alpha+\beta_1'}{\beta_1''}}$ oder:

(34.) Es ist $\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}$ durch $\mathfrak{b}_1^{\alpha+\beta_1'}$ teilbar.

Die Gleichung der Projektion des Primteilers $\mathfrak{B}_1$ auf die $\xi\eta$-Ebene ist $\eta = 0$. Zufolge der Gleichung (32.) lassen sich alle Funktionen aus K nach ganzen Potenzen von $\eta^{\frac{1}{\beta_1''}}$ entwickeln. Es ist also $\mathfrak{B}_1$ in bezug auf ξ, η ein Verzweigungsprimteiler der Ordnung $\beta_1'' - 1$ oder mit anderen Worten: Es ist $\mathfrak{B}_1$ in $\mathfrak{Z}_{\xi\eta}\mathfrak{A}^{-2}\mathfrak{M}^{-2}$ in der Potenz $\beta_1'' - 1$ enthalten. Aus der Gleichung (31.) folgt also:

Es ist $\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}$ genau durch die $(\alpha + \beta_1 + \beta_1'' - 1)$-te Potenz von $\mathfrak{b}_1$ teilbar. Vergleichen wir dieses Resultat mit (34.), so folgt die zu beweisende Gleichung

$$\beta_1 = \beta_1' + \beta_1'' - 1.$$

8. Körper, bei denen das geometrische Geschlecht oder eins der vielfachen Geschlechte von Null verschieden ist.

Wir betrachten jetzt den Fall, wo die kanonische Klasse $(\mathfrak{K})$ oder eine ihrer *positiven* Potenzen $(\mathfrak{K}^a)$ mindestens einen ganzen Divisor enthält. Es gilt der schon lange bekannte Satz, daß jeder ganze Divisor der kanonischen Klasse oder einer ihrer positiven Potenzen in bezug auf eine den Körper darstellende Fläche F durch die ausgezeichneten Kurven von F teilbar ist. Wir wollen den Satz hier mit unserer Methode beweisen und dabei gleichzeitig die Exponenten der in den ganzen Divisoren von $(\mathfrak{K}^a)$ enthaltenen Potenzen der ausgezeichneten Kurven von F bestimmen.

Dazu betrachten wir wieder die Transformation von x, y, z zu ξ, η, ζ. Die kanonische Klasse in bezug auf ξ, η, ζ sei wieder mit $(\mathfrak{K}')$ bezeichnet. Es seien alle ganzen Divisoren von $(\mathfrak{K}^a)$ teilbar durch

$$\mathfrak{A}_1^{\sigma_1}\mathfrak{A}_2^{\sigma_2}\cdots\mathfrak{A}_m^{\sigma_m}$$

und die von $(\mathfrak{K}'^a)$ durch

$$\mathfrak{B}_1^{\tau_1}\mathfrak{B}_2^{\tau_2}\cdots\mathfrak{B}_n^{\tau_n}.$$

Es seien

$$\mathfrak{G}\mathfrak{A}_1^{\sigma_1}\mathfrak{A}_2^{\sigma_2}\cdots\mathfrak{A}_m^{\sigma_m}, \quad \mathfrak{G}'\mathfrak{B}_1^{\tau_1}\mathfrak{B}_2^{\tau_2}\cdots\mathfrak{B}_n^{\tau_n}$$

ganze Divisoren von $(\mathfrak{K}^a)$ und $(\mathfrak{K}'^a)$. Es sind dann $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ auch ganze Divisoren, und zwar besteht $\mathfrak{G}$ aus Primteilern erster Art in bezug auf x, y, z und $\mathfrak{G}'$ aus Primteilern erster Art in bezug auf ξ, η, ζ. Es sei, in Primteiler zerlegt, $\mathfrak{G} = \mathfrak{P}_1^{p_1}\mathfrak{P}_2^{p_2}\cdots$. Die Primteiler $\mathfrak{P}_i$ seien als Primteiler in bezug auf ξ, η, ζ mit $\mathfrak{P}_i'$ bezeichnet. Dann wollen wir der Einfachheit wegen für $\mathfrak{G}'$ den Divisor $\mathfrak{G}' = \mathfrak{P}_1'^{p_1}\mathfrak{P}_2'^{p_1}\cdots$ nehmen, so daß die Gleichung besteht

$$\frac{\mathfrak{G}}{s\mathfrak{G}} = \frac{\mathfrak{G}'}{s\mathfrak{G}'}.$$

Es sei ferner

$$s\mathfrak{G} = \mathfrak{b}_1^{\delta_1}\mathfrak{b}_2^{\delta_2}\cdots\mathfrak{b}_n^{\delta_n}, \quad s\mathfrak{G}' = \mathfrak{a}_1^{\gamma_1}\mathfrak{a}_2^{\gamma_2}\cdots\mathfrak{a}_m^{\gamma_m}.$$

Nach dem in Nr. 6 angegebenen Satze ist

$$(\mathfrak{K}\mathfrak{b}) = (\mathfrak{K}'\mathfrak{a}),$$

also ist auch

$$(35.) \qquad \mathfrak{G}\mathfrak{A}_1^{\sigma_1}\mathfrak{A}_2^{\sigma_2}\cdots\mathfrak{A}_m^{\sigma_m}\mathfrak{b}^a \backsim \mathfrak{G}'\mathfrak{B}_1^{\tau_1}\mathfrak{B}_2^{\tau_2}\cdots\mathfrak{B}_n^{\tau_n}\mathfrak{a}^a.$$

Nach den Transformationsformeln (6.) ist aber

$$\mathfrak{b}_1^{\tau_1}\mathfrak{b}_2^{\tau_2}\cdots\mathfrak{b}_n^{\tau_n}\frac{\mathfrak{G}}{s\mathfrak{G}}\left(\frac{\mathfrak{A}_1}{s\mathfrak{A}_1}\right)^{\sigma_1}\left(\frac{\mathfrak{A}_2}{s\mathfrak{A}_2}\right)^{\sigma_2}\cdots\left(\frac{\mathfrak{A}_m}{s\mathfrak{A}_m}\right)^{\sigma_m}$$
$$=\left(\frac{\mathfrak{B}_1}{s\mathfrak{B}_1}\right)^{\tau_1}\left(\frac{\mathfrak{B}_2}{s\mathfrak{B}_2}\right)^{\tau_2}\cdots\left(\frac{\mathfrak{B}_n}{s\mathfrak{B}_n}\right)^{\tau_n}\frac{\mathfrak{G}'}{s\mathfrak{G}'}\,\mathfrak{a}_1^{\sigma_1}\mathfrak{a}_2^{\sigma_2}\cdots\mathfrak{a}_m^{\sigma_m}.$$

In Verbindung mit der Äquivalenz (35.) folgt hieraus

(36.) $$\mathfrak{b}_1^{-\tau_1}\mathfrak{b}_2^{-\tau_2}\cdots\mathfrak{b}_n^{-\tau_n}\,s\mathfrak{A}_1\,s\mathfrak{A}_2\cdots s\mathfrak{A}_m\,s\mathfrak{G}\,\mathfrak{b}^a$$
$$\sim\mathfrak{a}_1^{-\sigma_1}\mathfrak{a}_2^{-\sigma_2}\cdots\mathfrak{a}_m^{-\sigma_m}\,s\mathfrak{B}_1\,s\mathfrak{B}_2\cdots s\mathfrak{B}_n\,s\mathfrak{G}'\,\mathfrak{a}^a.$$

In dieser Äquivalenz stehen auf der linken Seite nur Primteiler zweiter Art in bezug auf x, y, z und auf der rechten nur Primteiler zweiter Art in bezug auf ξ, η, ζ. Es müssen daher beide Seiten für sich gleich 1 sein. Denn enthält z. B. die linke Seite den Primteiler $\mathfrak{b}_1$ in der von Null verschiedenen Potenz β, so würde bei Anwendung der Transformationsformeln (6.) die linke Seite in einen Divisor in bezug auf ξ, η, ζ übergehen, der den Primteiler $\mathfrak{B}_1$ in der β-ten Potenz enthält, und dieser Divisor müßte äquivalent sein zu der rechten Seite von (36.). Das geht aber nicht, weil diese überhaupt keinen Primteiler erster Art in bezug auf ξ, η, ζ enthält. Es sind daher die Exponenten der $\mathfrak{a}_i$ sowohl wie der $\mathfrak{b}_i$ in (36.) einzeln gleich 0. Daraus ergeben sich zwei Reihen von Gleichungen, nämlich, unter Benutzung der Gleichungen (9.)

$(37^a.)$ $$\tau_i=\alpha\beta_i+\delta_i+\sigma_1\alpha_{1i}+\sigma_2\alpha_{2i}+\cdots+\sigma_m\alpha_{mi},\qquad (i=1,2,\ldots n)$$

$(37^b.)$ $$\sigma_i=\alpha\alpha_i+\gamma_i+\tau_1\beta_{1i}+\tau_2\beta_{2i}+\cdots+\tau_n\beta_{ni}.\qquad (i=1,2,\ldots m)$$

Alle in diesen Gleichungen vorkommenden Größen sind größer oder gleich Null. Die Größen α_i und β_i sind, wie wir gesehen haben, immer *größer* als Null. Also sind auch τ_i und σ_i größer als Null, und damit ist bewiesen, daß alle ganzen Divisoren von $(\mathfrak{R}^a)$ jede der ausgezeichneten Kurven von F als Faktor enthalten.

Hieraus folgt, da ein ganzer Divisor von $(\mathfrak{R}^a)$ nur eine endliche Zahl von Primteilern erster Art enthalten kann:

Auf einer Fläche F liegen nur eine endliche Zahl von ausgezeichneten Kurven, wenn das geometrische Geschlecht der Fläche oder eins der mehrfachen Geschlechte von Null verschieden ist.

Aus den Gleichungen (37.) können wir in Verbindung mit den Gleichungen (10.) noch weitere wichtige Schlüsse ziehen, nämlich zunächst den, daß die Größen α_{ik} und β_{ik} alle Null sein müssen, wie wir gleich zeigen

werden. Mit anderen Worten, es ist $s\mathfrak{A}_i = 1$ und $s\mathfrak{B}_i = 1$, d. h. keiner der Punkte der Kurven $\mathfrak{A}_i$ geht bei der Transformation in eine Kurve über und ebenso keiner der Punkte der Kurven $\mathfrak{B}_i$. Es besteht also der Satz:

Es sei F eine algebraische Fläche, bei der das geometrische Geschlecht oder eins der mehrfachen Geschlechte größer als Null ist. Es liege auf ihr die ausgezeichnete Kurve $\mathfrak{A}$. *Geht bei einer Transformation* $\mathfrak{A}$ *über in einen Punkt, so geht bei dieser Transformation kein Punkt von* $\mathfrak{A}$ *über in eine Kurve.*

Man nennt *ausgezeichnete Kurven*, die diese Eigenschaft haben, von *der ersten Klasse.* Wir können also den Satz auch in der Form aussprechen:

Auf einer algebraischen Fläche mit einem geometrischen Geschlecht oder einem mehrfachen Geschlechte größer als Null können nur ausgezeichnete Kurven erster Klasse liegen.

Es gibt, worauf schon oben hingewiesen, immer Transformationen, bei denen ein Punkt von $\mathfrak{A}$ in eine Kurve übergeht, aber bei einer solchen Transformation kann $\mathfrak{A}$ nicht in einen Punkt übergehen, sondern geht wieder in eine Kurve über.

Dieser Satz ist zuerst aufgestellt und bewiesen worden von den Herren *Enriques* und *Castelnuovo* (a. a. O.).

Wir nehmen an, es sei etwa α_{11} von Null verschieden. Es geht dann $\mathfrak{A}_1$ durch die Stelle, zu der $\mathfrak{b}_1$ gehört. Die Stelle heiße S'. Zu dieser Stelle mögen außerdem noch gehören $\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3, \dots \mathfrak{b}_\nu$. Dann sind auch $\mathfrak{b}_2, \dots \mathfrak{b}_\nu$ in $\mathfrak{A}_1$ enthalten. Es sind also auch $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \dots \alpha_{1\nu}$ von Null verschieden. Aus den Gleichungen (37ª.) ergibt sich daher, da die β_i alle größer als Null sind,

$$\tau_1 > \sigma_1, \quad \tau_2 > \sigma_1, \dots \tau_\nu > \sigma_1. \tag{38.}$$

Es müssen also die Größen

$$\beta_{11}, \beta_{21}, \dots \beta_{\nu 1} \tag{39.}$$

alle gleich Null sein. Denn sonst würde aus den Gleichungen (37ᵇ.), in denen die $\alpha_i > 0$ sind, folgen, daß σ_1 größer wäre als jede der Größen $\tau_1, \dots \tau_\nu$ im Widerspruch zu (38.).

Ist aber $\beta_{k1} = 0$, so heißt das, die Kurve $\mathfrak{B}_k$ geht nicht durch die Stelle, zu der $\mathfrak{a}_1$ gehört. Es sei dies die Stelle S. Zu S mögen außer $\mathfrak{a}_1$ auch noch gehören $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \dots \mathfrak{a}_\mu$. Es sind dann auch $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \dots \mathfrak{a}_\mu$ nicht

in $\mathfrak{B}_k$ enthalten, d. h., es ist nicht nur $\beta_{k1} = 0$, sondern auch $\beta_{k2}, \dots \beta_{k\mu}$. Aus dem Verschwinden der Größen (39.) folgt also allgemeiner

$$\beta_{1i} = \beta_{2i} = \cdots = \beta_{\nu i} = 0. \qquad (i=1, 2, \dots \mu) \tag{40.}$$

Bedenken wir, daß nach Definition die Größe $(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_k) = 0$ ist, wenn $\mathfrak{b}_i$ und $\mathfrak{b}_k$ zu verschiedenen Stellen gehören, und daß entsprechendes für die Größen $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k)$ gilt, so lauten die ν Gleichungen, die aus den Gleichungen (10.) für $i = 1$ und $k = 1, 2, 3, \dots \nu$ hervorgehen,

$$\alpha_{11}(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_1) + \alpha_{12}(\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_1) + \cdots + \alpha_{1\nu}(\mathfrak{b}_\nu, \mathfrak{b}_1) = \beta_{11}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1) + \beta_{12}(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_1) + \cdots + \beta_{1\mu}(\mathfrak{a}_\mu, \mathfrak{a}_1),$$
$$\alpha_{11}(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2) + \alpha_{12}(\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_2) + \cdots + \alpha_{1\nu}(\mathfrak{b}_\nu, \mathfrak{b}_2) = \beta_{21}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1) + \beta_{22}(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_1) + \cdots + \beta_{2\mu}(\mathfrak{a}_\mu, \mathfrak{a}_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_{11}(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_\nu) + \alpha_{12}(\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_\nu) + \cdots + \alpha_{1\nu}(\mathfrak{b}_\nu, \mathfrak{b}_\nu) = \beta_{\nu 1}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1) + \beta_{\nu 2}(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_1) + \cdots + \beta_{\nu\mu}(\mathfrak{a}_\mu, \mathfrak{a}_1).$$

Die in diesen Gleichungen auf der rechten Seite stehenden β sind aber nach (40.) alle gleich Null, also sind auch die linken Seiten Null. Da aber die Determinante

$$|(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_k)| \qquad (i, k=1, 2, \dots \nu)$$

nicht gleich Null ist, so folgt, daß die Koeffizienten $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots \alpha_{1\nu}$ gleich Null sein müssen. Unsere Annahme, diese Größen α wären nicht gleich Null, ist also falsch. In derselben Art ist zu beweisen, daß alle α_{ik} gleich Null sind, und ebenso, daß die β_{ik} alle gleich Null sein müssen. Damit ist der zu beweisende Satz bewiesen.

Die Formeln (37.) werden jetzt einfacher

$$\tau_i = \alpha\,\beta_i + \delta_i, \quad \sigma_i = \alpha\,\alpha_i + \gamma_i. \tag{41.}$$

9. Verhalten des Grades der kanonischen Klasse ($\mathfrak{R}$) bei birationaler Transformation.

Wir betrachten den Fall noch genauer, wo eine der Klassen ($\mathfrak{R}^\alpha$) ($\alpha > 0$) wenigstens einen ganzen Divisor enthält. Wir haben gesehen, daß dann besonders einfache Verhältnisse vorhanden sind, daß dann nämlich auf jeder Fläche nur eine endliche Zahl von ausgezeichneten Kurven liegen, und daß bei einer birationalen Transformation, bei der eine dieser Kurven in einen Punkt übergeht, kein Punkt dieser Kurve in eine Kurve übergeht, mit anderen Worten, daß die Größen α_{ik} und β_{ik} alle gleich Null sind. Wir wollen noch weitere Eigenschaften herleiten. Das Endziel ist, zu bestimmen, wie sich die Größe $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$ bei einer birationalen Transformation ändert. Wie wir gesehen haben, geht die kanonische Klasse ($\mathfrak{R}$)

bei der Transformation nicht in die kanonische Klasse $(\mathfrak{K}')$ der neuen Fläche F über, sondern es geht die Klasse $(\mathfrak{K}\mathfrak{b})$ über in die Klasse $(\mathfrak{K}'\mathfrak{a})$, wo $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die in Nr. 7 eingeführten Divisoren sind. $\mathfrak{a}$ ist von der zweiten Art in bezug auf die transformierte Fläche F' und $\mathfrak{b}$ von der zweiten Art in bezug auf die Fläche F. Da $\mathfrak{K}\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{K}'\mathfrak{a}$ zueinander äquivalent sind, so ist

$$(\mathfrak{K}\mathfrak{b}, \mathfrak{K}\mathfrak{b}) = (\mathfrak{K}'\mathfrak{a}, \mathfrak{K}'\mathfrak{a})$$

oder

$$(42.) \qquad (\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) + (\mathfrak{b}, \mathfrak{b}) = (\mathfrak{K}', \mathfrak{K}') + (\mathfrak{a}, \mathfrak{a}).$$

Um also zu bestimmen, wie sich $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K})$ bei einer birationalen Transformation ändert, kann man die Größen $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b})$ und $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})$ berechnen. Das gelingt auch in dem Falle, den wir hier betrachten, nämlich, wo eine der Klassen $(\mathfrak{K}^\alpha)$ $(\alpha > 0)$ einen ganzen Divisor enthält. Im allgemeinen Falle ist mir diese Berechnung nicht gelungen, auch nicht die Berechnung der Differenz $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}) - (\mathfrak{a}, \mathfrak{a})$, deren Berechnung ja genügen würde.

1. Das System der Größen $[i, k]$ und ebenso das der Größen $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k)$ zerfällt in so viele Einzelsysteme, wie auf der Fläche F' Stellen vorhanden sind, zu denen Primteiler $\mathfrak{a}_i$ gehören, weil $[i, k]$ und $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k)$ immer dann Null sind, wenn $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{a}_k$ zu verschiedenen Stellen von F gehören. Wir beschränken uns auf die Primteiler $\mathfrak{a}_i$, die zu *einer* Stelle von F' gehören, etwa die Primteiler

$$(43.) \qquad \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_\varrho.$$

Die Größe

$$(44.) \qquad (\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = \sum_{i,k}^{1 \ldots m} \alpha_i \alpha_k (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k)$$

zerfällt in so viele Summanden, als es Stellen der Fläche F' gibt, zu denen Primteiler $\mathfrak{a}_i$ gehören. Da wir uns auf die Primteiler (43.) beschränken wollen, so beschränken wir uns auch auf die Berechnung des ersten Summanden von $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})$. Um keine neue Bezeichnung einführen zu müssen, wollen wir uns denken, daß *alle* Primteiler $\mathfrak{a}_i$ zu *einer* Stelle von F' gehören, daß also die ϱ Primteiler (43.) alle Primteiler $\mathfrak{a}_i$ sind.

2. Alle Größen $[i, k]$ sind dann der Definition nach positive von Null verschiedene ganze Zahlen. Ihre Determinante ist, wie wir gesehen haben, gleich ± 1. Die Größen $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k)$ wollen wir zur Abkürzung mit a_{ik} bezeichnen. Das System der Größen a_{ik} ist das negativ reziproke zu dem System der $[i, k]$. Die Größen a_{ik} sind also ganzzahlig. Da die

einfachen Transformationsformeln

$$\mathfrak{a}_i = \mathfrak{A}_i$$

gelten, so ist

$$a_{ik} = (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k) = (\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_k).$$

Wenn also $i \neq k$, so ist a_{ik} die Zahl der Schnittpunkte zweier voneinander verschiedenen Kurven der Fläche F' und daher nicht negativ. Es sind aber die Größen a_{ii} sicher negativ. Denn wäre z. B. $a_{11} \geqq 0$, so könnte die Gleichung

$$a_{11}[1,1] + a_{12}[1,2] + \cdots + a_{1\varrho}[1,\varrho] = -1,$$

in der die $[i,k]$ und $a_{12}, a_{13}, \ldots a_{1\varrho}$ nicht negativ sind, nicht bestehen. Diese Gleichung besteht aber, weil das System (a_{ik}) das negative reziproke zu dem System $([i,k])$ ist. Es sind also die Größen a_{ik} ganze Zahlen, und es ist

$$\begin{aligned} a_{ik} &\geqq 0 \quad \text{für } i \neq k, \\ &< 0 \quad \text{für } i = k. \end{aligned}$$

3. Wir betrachten die Funktionenschar

$$A_1(t_1) - k\,A_1(t_2),$$

wo $A_1(t) \equiv A_1(u, v; t)$ die Eichfunktion von $\mathfrak{a}_1$ und k ein veränderlicher Parameter ist. Wir bezeichnen den Zähler dieser Funktion mit

$$\mathfrak{P}'(t_1) - k\mathfrak{P}'(t_2) \equiv \mathfrak{P}'.$$

Infolge der Definition der Größen $[i,k]$ ist

$$s\,\mathfrak{P}' = \mathfrak{a}_1^{[11]}\,\mathfrak{a}_2^{[12]} \ldots \mathfrak{a}_\varrho^{[1\varrho]}$$

und daher, wenn wir den Primteiler $\mathfrak{P}'$ als Primteiler in bezug auf F mit $\mathfrak{P}$ bezeichnen, beim Übergang zu F

$$\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}\,\mathfrak{A}_1^{[11]}\mathfrak{A}_2^{[12]} \ldots \mathfrak{A}_\varrho^{[1\varrho]}.$$

Für $\mathfrak{P}$ schreiben wir auch ausführlicher

$$\mathfrak{P} \equiv \mathfrak{P}(t_1) - k\,\mathfrak{P}(t_2).$$

Für $\mathfrak{a}_1 = 0$ wird

$$\frac{A_1(t_1) - k\,A_1(t_2)}{A_1(t_2)} = \frac{\tau - \tau_1 - k(\tau - \tau_2)}{\tau - \tau_2}, \tag{45.}$$

wo τ eine passend gewählte Potenz der Hilfsgröße t ist, etwa $\tau = t^\varepsilon$, und wo $\tau_i = t_i^\varepsilon$ gesetzt ist. Nach den Untersuchungen von Nr. 5 folgt aus (45.), da die linke Seite für $\mathfrak{a}_1 = 0$ in eine Funktion ersten Grades von τ übergeht,

$$(\mathfrak{P}, \mathfrak{A}_1) = 1. \tag{46.}$$

Die Kurven der Schar $\mathfrak{P} \equiv \mathfrak{P}(t_1) - k\,\mathfrak{P}(t_2)$ schneiden also die Kurve $\mathfrak{A}_1$ nur in einem Punkte. Daraus folgt, daß die Kurve $\mathfrak{A}_1$ keinen mehrfachen

Punkt haben kann. Nehmen wir nämlich an, $\mathfrak{A}_1$ hätte an einer Stelle S einen mehrfachen Punkt, dann könnten wir k immer so bestimmen, daß $\mathfrak{P}$ durch S hindurchgeht. Der so bestimmte Wert von k sei k_0. Es würde dann für die diesem Wert von k entsprechende Kurve $\mathfrak{P}$, die mit $\mathfrak{P}_0$ bezeichnet sei, entgegen der Gleichung (46.) $(\mathfrak{P}_0, \mathfrak{A}_1) > 1$, wenn nicht etwa $\mathfrak{P}_0$ durch $\mathfrak{A}_1$ teilbar ist. Das aber kann nicht sein, weil dann für $a_1 = 0$ der Divisor $\mathfrak{P}_0$ identisch Null werden müßte und also für $k = k_0$ die lineare Funktion

$$\tau - \tau_1 - k(\tau - \tau_2)$$

identisch verschwinden müßte, was aber für keinen Wert von k eintreten kann. Da für die anderen Primteiler $\mathfrak{A}_i$ dasselbe gilt, so haben wir den Satz:

Die ausgezeichneten Primteiler $\mathfrak{A}_i$ *haben keinen mehrfachen Punkt, oder, anders ausgedrückt, der Divisor ihrer mehrfachen Punkte ist gleich* 1.

Es ist daher das virtuelle Geschlecht der Primteiler $\mathfrak{A}_i$ gleich ihrem wirklichen, und da ihr Geschlecht gleich Null ist, so ist

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_i \mathfrak{K}) + 1 = 0$$

oder

$$(47.) \qquad (\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_i \mathfrak{K}) = -2.$$

Es ist aber $(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{b}) = 0$ und $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{K}') = 0$ und daher

$$(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_i \mathfrak{K}) = (\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_i \mathfrak{K} \mathfrak{b}) = {}_{\mathfrak{j}}(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_i \mathfrak{K}' \mathfrak{a}) = (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_i \mathfrak{c}).$$

Nach (47.) bestehen daher die Gleichungen

$$(48.) \qquad (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_i \mathfrak{a}) = -2$$

oder, ausführlich geschrieben, unter Benutzung der Bezeichnung $a_{ik} = (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k)$

$$(49.) \qquad \alpha_1 a_{1i} + \alpha_2 a_{2i} + \cdots + \alpha_\varrho a_{\varrho i} = -2 - a_{ii}. \qquad (i=1,2,\ldots\varrho)$$

Da die Determinante der a_{ik} von Null verschieden ist, so geben uns diese Gleichungen eine zweite Möglichkeit der Berechnung der Exponenten α_i. Die erste ist gegeben durch die Gleichungen (29.) in Nr. 7.

Aus den Gleichungen (49.) ergibt sich noch eine Eigenschaft der Diagonalglieder a_{ii} des Systems der a_{ik}, die im folgenden wichtig werden wird, nämlich die, daß unter den Größen a_{ii} mindestens eine gleich -1 ist, und zwar auf folgende Weise. Die a_{ii} sind negative von Null verschiedene ganze Zahlen. Aus den Gleichungen (49.) ergibt sich durch Auflösung

$$-\alpha_i = (-2 - a_{11})[1, i] + (-2 - a_{22})[2, i] + \cdots + (-2 - a_{\varrho\varrho})[\varrho, i].$$

Hierin sind die α_i und die $[k, i]$ alle positiv und von Null verschieden.

Wären also die a_{ii} alle kleiner als -1, also die Koeffizienten $(-2-a_{ii})$ alle Null oder positiv, so würden diese Gleichungen nicht möglich sein.

4. Für $\mathfrak{a}_2 = 0$ wird

$$\frac{A_1(t_1) - k A_1(t_2)}{A_1(t_2)} = \frac{A_1(t_1)}{A_1(t_2)} - k$$

zu einer von der Hilfsgröße t unabhängigen Größe, etwa gleich $k_{12} - k$. Es ist also $(\mathfrak{P}, \mathfrak{A}_2) = 0$ oder allgemeiner

(50.) $$(\mathfrak{P}, \mathfrak{A}_i) = 0 \qquad \text{für } i > 1.$$

Man kann k so wählen, daß $\mathfrak{P}'$ durch $\mathfrak{a}_2$ und also $\mathfrak{P}$ durch $\mathfrak{A}_2$ teilbar wird. Man braucht nur $k = k_{12}$ zu setzen. Wir bezeichnen $\mathfrak{P}(k_{12})$ mit $\mathfrak{P}_0$. Es wird ja dann für $\mathfrak{a}_2 = 0$ das entsprechende $\mathfrak{P}$ identisch Null, muß also durch $\mathfrak{a}_2$ teilbar sein.

$\mathfrak{P}_0$ ist durch $\mathfrak{A}_2$ teilbar, kann aber auch noch andere der Primteiler $\mathfrak{A}_i$ enthalten, nur nicht $\mathfrak{A}_1$, wie wir gesehen haben. Es sei etwa

(51.) $$\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{G}_0 \mathfrak{A}_2^{\delta_2} \mathfrak{A}_3^{\delta_3} \cdots \mathfrak{A}_\varrho^{\delta_\varrho},$$

wo natürlich nicht ausgeschlossen ist, daß einige der δ_i Null sind. Nur δ_2 ist sicher von Null verschieden. Es ist nach (46.) und (51.)

$$(\mathfrak{P}_0, \mathfrak{A}_1) = (\mathfrak{G}_0, \mathfrak{A}_1) + \delta_2 (\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1) + \cdots + \delta_\varrho (\mathfrak{A}_\varrho, \mathfrak{A}_1) = 1.$$

Da $(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{A}_1)$ und $(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_1)(i > 1)$ nicht negative ganze Zahlen sind, so folgt, daß $(\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1)$ nicht größer als 1 sein kann. Statt $\mathfrak{A}_2$ hätten wir aber auch jeden der anderen Primteiler $\mathfrak{A}_i$ $(i > 1)$ nehmen können, es ist also für $i > 1$ $(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_1)$ gleich 0 oder 1. Was aber von $\mathfrak{A}_1$ gilt, gilt auch von den anderen Primteilern $\mathfrak{A}_i$, und wir haben also den Satz:

Die Größen $a_{ik} = (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k) = (\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_k)$ *sind für* $i \neq k$ *entweder* 0 *oder* 1.

5. Die Größen $(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_k)$ können nun nicht etwa für $i \neq k$ alle den Wert Null haben. Ja, es können schon die Größen $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2), (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_3), \ldots (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_\varrho)$ nicht alle gleich Null sein. Daraus würde nämlich folgen, daß die Unterdeterminante von a_{11} in der Determinante der a_{ik} gleich Null sein würde und also auch die Größe [1,1], von der wir aber wissen, daß sie sicher nicht Null ist. Die Herren *Castelnuovo* und *Enriques* geben a. a. O. an, zwei ausgezeichnete Kurven erster Art schnitten sich nie. Dieser Satz ist also nicht richtig. Die Herren *Castelnuovo* und *Enriques* geben als Grund an, ein solcher Schnittpunkt müßte bei der Transformation in eine Kurve auf der neuen Fläche übergehen. Es würde also dann ein Punkt der ausgezeichneten Kurve in eine Kurve übergehen, und die ausgezeichnete

Kurve wäre nicht von der ersten Art. Aber dieser Grund ist nicht stichhaltig. Sind etwa $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ zwei ausgezeichnete Kurven, die sich schneiden, und die beim Übergang zu F' in Punkte übergehen, so muß einem Schnittpunkte von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ immer dann eine Kurve auf F' entsprechen, wenn $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ in *verschiedene* Punkte von F' übergehen, aber nicht, wenn $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ in denselben Punkt von F' übergehen. Das ergibt sich einmal aus dem hier Bewiesenen, daß die $(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_k) = a_{ik}$ nicht alle Null sein können für $i \neq k$, dann aber kann ich auch auf das Beispiel verweisen am Schlusse meiner Arbeit über die *Cremona*schen Transformationen der Ebene in diesem Journal Bd. 138, S. 312 u. fgde.

Wir wollen die $\mathfrak{A}_i$ so geordnet annehmen, daß

$$(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2) = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_3) = \cdots = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_{\lambda_1}) = 1,$$

während

$$(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_i) = 0 \qquad \text{für } i > \lambda_1.$$

Wir können jetzt zeigen, daß dann $(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_k) = 0$, wenn i, k irgend zwei verschiedene der Zahlen $2, 3, \ldots \lambda_1$ sind. Zu diesem Zwecke betrachten wir wieder den Divisor $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}(k_{12})$. Dieser war sicher nicht durch $\mathfrak{A}_1$ teilbar, wohl aber durch $\mathfrak{A}_2$. Wir schreiben

$$\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{G}_0 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_\alpha \mathfrak{A}_\beta \mathfrak{A}_\gamma \cdots,$$

wo die Primteiler $\mathfrak{A}_\alpha, \mathfrak{A}_\beta, \ldots$ nicht alle voneinander verschieden zu sein brauchen. Es ist aber

$$(\mathfrak{P}_0, \mathfrak{A}_1) = 1 \quad \text{und} \quad (\mathfrak{P}_0, \mathfrak{A}_i) = 0 \qquad \text{für } i > 1,$$

wie wir gesehen haben. Also ist

$$(\mathfrak{P}_0, \mathfrak{A}_1) = (\mathfrak{G}_0, \mathfrak{A}_1) + (\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1) + (\mathfrak{A}_\alpha, \mathfrak{A}_1) + (\mathfrak{A}_\beta, \mathfrak{A}_1) + \cdots = 1.$$

Da aber $(\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1) = 1$ ist und die übrigen Summanden $(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{A}_1), (\mathfrak{A}_\alpha, \mathfrak{A}_1), \ldots$ nicht negativ sein können, so folgt, daß diese alle gleich Null sind. Es kann also unter den Primteilern $\mathfrak{A}_\alpha, \mathfrak{A}_\beta, \mathfrak{A}_\gamma, \ldots$, die in $\mathfrak{P}_0$ enthalten sind, keiner der Primteiler $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \ldots \mathfrak{A}_{\lambda_1}$ vorkommen. Ist jetzt i eine der Zahlen von 3 bis λ_1, so folgt aus $(\mathfrak{P}_0, \mathfrak{A}_i) = 0$

$$(52.) \qquad (\mathfrak{G}_0, \mathfrak{A}_i) + (\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_i) + (\mathfrak{A}_\alpha, \mathfrak{A}_i) + \cdots = 0.$$

Da aber unter den Primteilern $\mathfrak{A}_\alpha, \mathfrak{A}_\beta, \mathfrak{A}_\gamma, \ldots$ der Primteiler $\mathfrak{A}_i$ nicht vorkommt, wie wir gesehen haben, so sind alle Summanden auf der linken Seite von (52.) nicht negativ, und also sind sie alle Null. Es ist also unter anderem $(\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_i) = 0$, wenn i eine der Zahlen von 3 bis λ_1 bedeutet.

Was aber von $\mathfrak{A}_2$ gilt, können wir ebenso für die anderen Primteiler $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_4, \ldots \mathfrak{A}_{\lambda_1}$ beweisen. Damit ist der angegebene Satz bewiesen.

Wir denken uns die $\mathfrak{A}_i$ weiter so geordnet, daß

$$\begin{aligned} (\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_i) &= 1 \qquad \text{für } i = \lambda_1 + 1, \ldots \lambda_2 \\ &= 0 \qquad \text{für } i > \lambda_2, \end{aligned}$$

und, wenn $\lambda_2 < \varrho$, denken wir uns weiter so geordnet, daß

$$\begin{aligned} (\mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_i) &= 1 \qquad \text{für } i = \lambda_2 + 1, \ldots \lambda_3 \\ &= 0 \qquad \text{für } i > \lambda_3. \end{aligned}$$

So fahren wir fort bis alle $\mathfrak{A}_i$ erschöpft sind.

Wir fassen das Ergebnis zusammen, wobei wir gleich das Vorzeichen der Determinante $|a_{ik}|$ angeben, das sich erst weiter unten ergibt:

Das System der $(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_k) = (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k) = a_{ik}$ *hat bei passender Anordnung der* a_{ik} *folgende Eigenschaften:*

a) *Die Determinante ist gleich* $(-1)^\varrho$.

b) *Das System ist symmetrisch.*

c) *In der Diagonalreihe stehen negative von Null verschiedene ganze Zahlen, von denen mindestens eine gleich* -1 *ist.*

d) *In jeder Vertikalreihe steht oberhalb der Diagonalreihe eine* 1 *und sonst nur Nullen.*

Hieraus ergibt sich die Gleichung

$$\sum_{i>k} (\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_k) = \varrho - 1; \tag{53.}$$

denn von den Größen $(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_k)$ $(i \neq k)$ sind gerade $\varrho - 1$ gleich 1, die anderen gleich Null.

6. Wir denken uns die a_{ik} so geordnet, daß $a_{11} = -1$ ist, und im übrigen so, daß in jeder Vertikalreihe *oberhalb* des Diagonalgliedes *eine* 1 steht und sonst nur Nullen.

Wir gehen über zur Berechnung von $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})$. Es ist

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = \sum \alpha_i \alpha_k a_{ik} = Q$$

eine quadratische Form der Größen α_i. Diese α_i sind durch die Koeffizienten a_{ik} bestimmt durch die Gleichungen (49.), nämlich

$$\alpha_1 a_{1i} + \alpha_2 a_{2i} + \cdots + \alpha_\varrho a_{\varrho i} = -2 - a_{ii}.$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$-2 - a_{ii} = c_i. \tag{54.}$$

Wir haben dann für Q auch die Darstellung

(55.) $$Q = (\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = \Sigma \alpha_i c_i .$$

Die Berechnung der quadratischen Form $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})$ führen wir in der Art durch, daß wir lineare Transformationen anwenden, durch die der Wert von $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})$ nicht geändert wird und ebensowenig die Form der Gleichungen (49.). Es wird uns gelingen, das System der Koeffizienten a_{ik} durch diese Transformationen so zu vereinfachen, daß wir $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})$ leicht berechnen können.

Wir bezeichnen das quadratische System, das in der ersten Horizontalreihe die Größen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\varrho$ enthält und im übrigen lauter Nullen, mit (α), und ähnlich das System, dessen erste Horizontalreihe gleich $c_1, c_2, \ldots c_\varrho$ ist, während die anderen Reihen nur Nullen enthalten, mit (c). Wir bezeichnen ferner das quadratische System von ϱ^2 Größen, das an der ersten Stelle der ersten Horizontalreihe die zu berechnende quadratische Form $Q = (\mathfrak{a}, \mathfrak{a})$ hat und im übrigen nur Nullen, mit (Q).

Das zu einem System (r) konjugierte System, das also aus (r) durch Vertauschen der Horizontalreihen und Vertikalreihen hervorgeht, bezeichnen wir mit $(\bar{r})$.

Es ist mit diesen Bezeichnungen nach den Regeln, die für das Rechnen mit Systemen gelten,

(56.) $$(Q) = (\alpha)\,(a_{ik})\,(\bar{\alpha}).$$

Dabei sind die α definiert durch die Gleichung

(57.) $$(\alpha)\,(a_{ik}) = (c).$$

Das System (a_{ik}) formen wir in folgender Weise um. Wir addieren die erste Vertikalreihe zu allen den Vertikalreihen, deren erste Zahl eine 1 ist. Erinnern wir uns, daß $a_{11} = -1$ ist, so sehen wir, daß die erste Vertikalreihe des neuen Systems aus -1 und aus lauter Nullen besteht. Wir addieren dann die erste Horizontalreihe zu allen den Horizontalreihen, deren erste Zahl gleich 1 ist. Auf diese Weise erhalten wir wieder ein symmetrisches System, in dem in der ersten Horizontalreihe und der ersten Vertikalreihe nur Nullen stehen mit Ausnahme der ersten Zahl, die gleich -1 ist. Das neue System bezeichnen wir mit $(a_{ik}^{(1)})$. Bezeichnet man mit P dasjenige quadratische System von ϱ^2 Größen, das aus dem Einheitssystem dadurch hervorgeht, daß man in der ersten Vertikalreihe überall da die Nullen durch eine 1 ersetzt, wo in (a_{ik}) in der ersten Vertikalreihe eine 1 steht, so ist

(58.) $$(a_{ik}^{(1)}) = P(a_{ik})\,\bar{P}.$$

Bezeichnen wir mit P^{-1} und $\bar{P}^{-1}$ die reziproken Systeme von P und $\bar{P}$, so ist identisch

(59.) $$Q = (\alpha)(a_{ik})(\bar{\alpha}) = (\alpha)\,P^{-1}P(a_{ik})\,\bar{P}\,\bar{P}^{-1}(\bar{\alpha}).$$

Setzen wir

(60.) $$(\alpha)\,P^{-1} = (\alpha^{(1)})$$

und bedenken, daß dann

$$\bar{P}^{-1}(\bar{\alpha}) = (\overline{\alpha^{(1)}}),$$

so können wir (59.) auch schreiben

(61.) $$Q = (\alpha^{(1)})(a_{ik}^{(1)})(\overline{\alpha^{(1)}}).$$

Ferner ergibt sich aus (57.)

$$(\alpha)\,P^{-1}P(a_{ik})\,\bar{P} = (c)\,\bar{P}$$

oder, wenn wir noch setzen

(62.) $$(c)\,\bar{P} = (c^{(1)}),$$

(63.) $$(\alpha^{(1)})(a_{ik}^{(1)}) = (c^{(1)}).$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß auch die den Gleichungen (54.) entsprechenden Gleichungen bestehen, daß also

(64.) $$c_i^{(1)} = -2 - a_{ii}^{(1)}.$$

Nehmen wir etwa an, um ein bestimmtes Beispiel vor Augen zu haben, es sei

$$a_{12} = a_{13} = \cdots = a_{1\lambda} = 1,\ a_{1i} = 0 \qquad \text{für } i > \lambda;$$

dann ist

$$a_{11}^{(1)} = -1,\quad a_{ii}^{(1)} = a_{ii} + 1 \qquad \text{für } i = 2, 3, \ldots \lambda,\quad a_{ii}^{(1)} = a_{ii} \text{ für } i > \lambda.$$

Ferner

$$c_1^{(1)} = c_1 = -1,\quad c_i^{(1)} = c_i + c_1 = c_i - 1 \quad \text{für } i = 2, 3, \ldots \lambda,\quad c_i^{(1)} = c_i \text{ für } i > \lambda.$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich aber, daß allgemein die Gleichungen (64.) bestehen.

Wir haben also unsere Aufgabe zurückgeführt auf die Aufgabe, die quadratische Form (61.) zu berechnen unter Berücksichtigung der Gleichungen

$$\Sigma\alpha_i^{(1)}a_{ik}^{(1)} = c_i^{(1)},\quad c_i^{(1)} = -2 - a_{ii}^{(1)}.$$

Das System $(a_{ik}^{(1)})$ ist aber insofern einfacher als das System (a_{ik}) als $a_{11}^{(1)} = -1$, während im übrigen in der ersten Vertikalreihe und Horizontalreihe nur Nullen stehen.

7. Wir zeigen noch, daß die Größen $a_{ii}^{(1)} < 0$ sind, und daß außer $a_{11}^{(1)}$ mindestens noch eine von ihnen gleich -1 ist. Dies beweisen wir folgendermaßen:

Es besteht die Gleichung

(65.) $$(a_{ik})([i,k]) = (-1),$$

wo (-1) das System ist, das in der Diagonalreihe überall -1 stehen hat, während alle anderen Elemente 0 sind. Es ist also (-1) das negative Einheitssystem. Aus (65.) folgt

(66.) $$P(a_{ik})\bar{P}\bar{P}^{-1}([i,k])\,P^{-1} = P(-1)\,P^{-1}.$$

Das System (-1) ist aber mit jedem anderen vertauschbar, und daher ist $P(-1)\,P^{-1} = (-1)$. Setzen wir

(67.) $$([i,k]^{(1)}) = \bar{P}^{-1}([i,k])\,P^{-1},$$

so folgt unter Benutzung von (58.) aus (66.)

(68.) $$(a_{ik}^{(1)})([i,k]^{(1)}) = (-1).$$

Da $a_{11}^{(1)} = -1$ und $a_{1i}^{(1)} = a_{i1}^{(1)} = 0$ für $i > 1$, so folgt aus der letzten Gleichung

$$[1,1]^{(1)} = 1,\ [1,i]^{(1)} = [i,1]^{(1)} = 0 \qquad \text{für } i > 1.$$

Im übrigen ergibt sich aus der Gleichung (67.)

$$[i,k]^{(1)} = [i,k] \qquad \text{für } i,k \geqq 2.$$

Mit anderen Worten, es besteht, wenn wir hier einmal die Größen i und k nur die Werte von 2 bis ϱ annehmen lassen, die Gleichung

(69.) $$(a_{ik}^{(1)})([i,k]) = (-1), \qquad (i,k \neq 1),$$

wo hier unter (-1) das negative Einheitssystem von $(\varrho-1)^2$ Elementen zu verstehen ist. Unter den in der Gleichung (69.) enthaltenen Gleichungen kommt auch die Gleichung vor

(70.) $$[2,i]a_{2i}^{(1)} + [3,i]a_{3i}^{(1)} + \cdots + [\varrho,i]a_{\varrho i}^{(1)} = -1.$$

Da die $a_{ik}^{(1)}$ für $i \neq k$ gleich 0 oder 1 sind, da ferner die $[i,k]$ alle positiv sind, so kann die Gleichung (70.) nur bestehen, wenn $a_{ii}^{(1)} < 0$, und da die $a_{ik}^{(1)}$ ganze Zahlen sind, so ist

$$a_{ii}^{(1)} \leqq -1.$$

Wir haben noch zu zeigen, daß mindestens eine der Größen $a_{ii}^{(1)}$ gleich -1 ist. Dazu betrachten wir die Größen $\alpha_i^{(1)}$. Es bestehen die Gleichungen

$$\alpha_1^{(1)}a_{1i}^{(1)} + \alpha_2^{(1)}a_{2i}^{(1)} + \cdots + \alpha_\varrho^{(1)}a_{\varrho i}^{(1)} = c_i^{(1)}.$$

Da $a_{1i}^{(1)} = 0$ für $i \geqq 2$, so haben wir auch folgende Gleichungen

$$\alpha_2^{(1)}a_{2i}^{(1)} + \alpha_3^{(1)}a_{3i}^{(1)} + \cdots + \alpha_\varrho^{(1)}a_{\varrho i}^{(1)} = c_i^{(1)} \qquad (i \geqq 2).$$

Hieraus folgt durch Auflösen unter Benutzung von (69.)

(71.) $$-\alpha_i^{(1)} = [2,i]c_2^{(1)} + [3,i]c_3^{(1)} + \cdots + [\varrho,i]c_\varrho^{(1)}.$$

Wie aus den Gleichungen (60.) folgt, ist aber

$$\alpha_i^{(1)} = \alpha_i > 0 \qquad \text{für } i \geqq 2.$$

Da auch die $[i, k] > 0$, so kann die Gleichung (71.) nur bestehen, wenn mindestens eine der Größen $c_i^{(1)} < 0$. Da aber nach (64.) $c_i^{(1)} = -2 - a_{ii}^{(1)}$ ist, so heißt das, es muß mindestens eine der Größen $a_{ii}^{(1)} = -1$ $(i > 1)$ sein.

8. Wir denken uns die Größen des Systems $(a_{ik}^{(1)})$ so geordnet, daß $a_{22}^{(1)} = -1$ ist, und außerdem so, daß in jeder Vertikalreihe *oberhalb* des Diagonalgliedes eine 1 steht und sonst nur Nullen. Da $a_{22}^{(1)} = -1$, so können wir das System $(a_{ik}^{(1)})$ ganz in derselben Art umformen wie das System (a_{ik}) und zwar so, daß dabei die erste Vertikal- und die erste Horizontalreihe ganz ungeändert bleiben. Die Umformung besteht darin, daß wir die zweite Vertikalreihe zu denjenigen Vertikalreihen addieren, deren zweite Zahl gleich 1 ist, und daß wir dann die zweite Horizontalreihe zu denjenigen Horizontalreihen addieren, deren zweite Zahl eine 1 ist. Wir erhalten so ein System $(a_{ik}^{(2)})$ von der Art, daß die ersten beiden Diagonalglieder -1 sind, während im übrigen in den beiden ersten Vertikal- und Horizontalreihen nur Nullen stehen. Führen wir dann neue Größen $\alpha_i^{(2)}$ und $c_i^{(2)}$ ein durch die Gleichungen

$$c_i^{(2)} = -2 - a_{ii}^{(2)},$$

$$\alpha_1^{(2)} a_{1i}^{(2)} + \alpha_2^{(2)} a_{2i}^{(2)} + \cdots + \alpha_\varrho^{(2)} a_{\varrho i}^{(2)} = c_i^{(2)},$$

so ist

$$Q = \alpha_1^{(2)} c_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)} c_2^{(2)} + \cdots + \alpha_\varrho^{(2)} c_\varrho^{(2)}.$$

In dieser Weise können wir fortfahren. Wir bekommen dann schließlich ein System $(a_{ik}^{(\varrho-1)})$, das nichts anderes ist als das negative Einheitssystem. Definieren wir Größen $c_i^{(\varrho-1)}$ und $\alpha_i^{(\varrho-1)}$ durch die Gleichungen

(72.) $$c_i^{(\varrho-1)} = -2 - a_{ii}^{(\varrho-1)},$$

(73.) $$\alpha_1^{(\varrho-1)} a_{1i}^{(\varrho-1)} + \alpha_2^{(\varrho-1)} a_{2i}^{(\varrho-1)} + \cdots + \alpha_\varrho^{(\varrho-1)} a_{\varrho i}^{(\varrho-1)} = c_i^{(\varrho-1)},$$

so ist

(74.) $$Q = \alpha_1^{(\varrho-1)} c_1^{(\varrho-1)} + \alpha_2^{(\varrho-1)} c_2^{(\varrho-1)} + \cdots + \alpha_\varrho^{(\varrho-1)} c_\varrho^{(\varrho-1)}.$$

Da aber das System $(a_{ik}^{(\varrho-1)})$ das negative Einheitssystem ist, so ergeben die Gleichungen (72.) und (73.)

$$c_i^{(\varrho-1)} = -1, \qquad \alpha_i^{(\varrho-1)} = 1,$$

und also wird nach (74.)

(75.) $$Q = -\varrho.$$

Da das System $(a_{ik}^{(\varrho-1)})$ aus dem System (a_{ik}) durch Multiplikation mit Systemen hervorgeht, deren Determinante den Wert 1 hat, so haben

$(a_{ik}^{(\varrho-1)})$ und (a_{ik}) dieselbe Determinante. Es ist aber $|a_{ik}^{(\varrho-1)}| = (-1)^{\varrho}$ und also auch

$$|a_{ik}| = (-1)^{\varrho},$$

wie schon früher angegeben.

Ehe wir die durch die Gleichungen (53.) und (75.) ausgedrückten Ergebnisse in allgemeinerer Form aussprechen, sei ein Zahlenbeispiel für die angewandten Transformationen gegeben.

Wir nehmen

$$(a_{ik}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad |a_{ik}| = 1.$$

$$([i,k]) = \begin{pmatrix} 15 & 9 & 5 & 3 \\ 9 & 6 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Größen α_i ergeben sich aus den Gleichungen (49.) zu

$$\alpha_1 = 7, \quad \alpha_2 = 4, \quad \alpha_3 = 2, \quad \alpha_4 = 1.$$

Die Systeme $(a_{ik}^{(1)})$, $(a_{ik}^{(2)})$, $(a_{ik}^{(3)})$ sind der Reihe nach

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es ist ferner

$$c_1 = -1, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 1, \quad c_4 = 1,$$

also

$$Q = \Sigma \alpha_i c_i = -7 + 0 + 2 + 1 = -4,$$

wie es sein muß.

Versucht man die Eichfunktionen der Primteiler $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4$ so zu bestimmen, daß die Größen $[i,k]$ die angegebenen Werte annehmen, so findet man, daß das im wesentlichen nur auf eine Art geht. Man findet nämlich

$$A_1 \equiv N(v - au - u^{\frac{5}{3}}t), \qquad A_2 \equiv N(v - au - u^{\frac{3}{2}}t),$$
$$A_3 \equiv v - au - u^2 t, \qquad A_4 \equiv v - ut,$$

wo N bedeuten soll, daß die Norm der dahinter stehenden Größe zu bilden ist.

Bezeichnen wir wie früher die Ordnung von A_i in u und v mit α_i', α_i'', so ist

$$\alpha_1' = 5,\ \alpha_1'' = 3;\ \alpha_2' = 3,\ \alpha_2'' = 2;\ \alpha_3' = 2,\ \alpha_3'' = 1;\ \alpha_4' = 1,\ \alpha_4'' = 1.$$

Wir haben bewiesen, daß die Größen α_i' außer durch die Gleichungen (49.) auch definiert werden können durch die Gleichungen (29.), nämlich

$$\alpha_i = \alpha_i' + \alpha_i'' - 1.$$

Wenden wir diese Gleichungen auf unser Beispiel an, so bekommen wir tatsächlich dieselben Werte für die α_i wie vorher.

Ich möchte hier ausdrücklich bemerken, daß ich den inneren Grund für diese Tatsache nicht einsehe. Auch muß ich folgende Frage unentschieden lassen. Nehmen wir an, wir hätten ein System (a_{ik}) bestimmt, das allen Bedingungen genügt, denen ein solches System genügen muß. Wir können dann das negative reziproke System $([i, k])$ zu (a_{ik}) bestimmen. Gibt es dann immer Eichfunktionen A_i von der Art, daß die mit Hilfe dieser Eichfunktionen definierten Zahlen $[i, k]$ mit den durch das System (a_{ik}) definierten Zahlen $[i, k]$ übereinstimmen?

9. Wir wollen die gefundenen Ergebnisse in allgemeinerer Form aussprechen. Wir hatten angenommen, daß die Primteiler $\mathfrak{a}_i$ alle zu derselben Stelle von F' gehören. Wir wollen diese Beschränkung wieder fallen lassen. Die Zahl der Primteiler $\mathfrak{a}_i$ bezeichnen wir wieder wie früher mit m statt mit ϱ. Wie schon wiederholt angegeben, zerfällt das System der $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k)$ in so viele Einzelsysteme, als es Stellen auf F' gibt, zu denen Primteiler $\mathfrak{a}_i$ gehören. Die Zahl dieser Stellen sei mit $\overline{m}$ bezeichnet. Für jedes dieser Einzelsysteme gelten die hergeleiteten Sätze. Da die quadratische Form $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})$ in eine Summe von so vielen quadratischen Formen zerfällt, als es Stellen auf F' gibt, zu denen Primteiler $\mathfrak{a}_i$ gehören, und da jede dieser quadratischen Formen zu einem der Systeme gehört, in die das System $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k)$ zerfällt, so können wir die Gleichungen (53.) und (75.) ohne weiteres dahin verallgemeinern, daß wir sagen:

a) *Es ist*

$$\sum_{i>k} (\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_k) = m - \overline{m}. \tag{76.}$$

b) *Die Größe* $-(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})$ *ist gleich der Zahl* m *der Primteiler erster Art* $\mathfrak{A}_i$, *die beim Übergang von* F *zu* F' *in Primteiler zweiter Art übergehen.*

Vorausgesetzt ist, daß eine der Klassen $|\mathfrak{K}^\alpha|\ (\alpha > 0)$ *einen ganzen Divisor enthält.*

Es besteht ferner die Gleichung (42.).

$$(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) + (\mathfrak{b}, \mathfrak{b}) = (\mathfrak{K}', \mathfrak{K}') + (\mathfrak{a}, \mathfrak{a}).$$

Die Zahl der Primteiler $\mathfrak{b}_i$ haben wir mit n bezeichnet. Da für die Primteiler $\mathfrak{b}_i$ dasselbe gelten muß wie für die Primteiler $\mathfrak{a}_i$, so haben wir die Gleichungen

$$(77.) \qquad (\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = -m, \qquad (\mathfrak{b}, \mathfrak{b}) = -n,$$

also

$$(78.) \qquad (\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) + m = (\mathfrak{K}', \mathfrak{K}') + n.$$

Auf den Flächen F und F' liegen eine endliche Zahl von ausgezeichneten Kurven. Auf der Fläche F sind die m Kurven $\mathfrak{A}_i$ ausgezeichnet und auf der Fläche F' die n Kurven $\mathfrak{B}_i$, aber es können außer diesen noch mehr ausgezeichnete Kurven auf F liegen, etwa die l Kurven $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_l$. Beim Übergang von F zu F' gehen diese Kurven wieder in Kurven über, etwa $\mathfrak{P}_i$ in $\mathfrak{P}_i'$. Dann sind die $\mathfrak{P}_i'$ ausgezeichnete Kurven von F', und zwar alle, die es auf F' außer den $\mathfrak{B}_i$ geben kann. Es sind also $l + m$ und $l + n$ die Gesamtzahlen aller auf F und F' vorhandenen ausgezeichneten Kurven. Aus (78.) folgt aber

$$(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) + m + l = (\mathfrak{K}', \mathfrak{K}') + n + l.$$

Damit haben wir folgenden Satz:

Ist $(\mathfrak{K})$ *die kanonische Klasse einer Fläche* F *und hat eine der Klassen* $(\mathfrak{K}^a)(a > 0)$ *einen ganzen Divisor, bedeutet ferner* a *die Zahl der auf* F *liegenden ausgezeichneten Kurven, so ist die Größe*

$$(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) + a$$

eine Invariante für jede birationale Transformation der Fläche F.

Die Größe $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K})$ hat zwei Bedeutungen. Einmal ist sie der Grad der kanonischen Klasse. Bezeichnen wir ferner das virtuelle Geschlecht des kanonischen Divisors oder das Geschlecht der kanonischen Klasse mit $p^{(1)}$, so ist

$$p^{(1)} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}\mathfrak{K}) + 1,$$

also

$$(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) = p^{(1)} - 1,$$

und dies ist die zweite Bedeutung von $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K})$. Bei den Herren *Castelnuovo* und *Enriques* ist $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) + 1$ mit ω bezeichnet.

Die Zahl $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K})$ ist also nicht invariant bei birationaler Transformation. Sie wird ihren größten Wert annehmen, wenn die Fläche F so beschaffen ist, daß auf ihr keine ausgezeichneten Kurven liegen, daß also $a = 0$ ist.

10. Transformation in eine Fläche ohne ausgezeichnete Kurven.

Es entsteht die Frage, ob es möglich ist, eine Fläche F in eine andere zu transformieren, die keine ausgezeichneten Kurven enthält. Die Herren *Castelnuovo* und *Enriques* beweisen, daß sich jede Fläche, für die p_g oder eines der mehrfachen Geschlechte von Null verschieden ist, birational in eine Fläche ohne ausgezeichnete Kurven transformieren läßt. Aber dieser Beweis gilt leider nicht mehr, wenn man die unendlich fernen Stellen der Fläche F genau so wie die im endlichen liegenden behandelt, wie es hier geschieht. Daher kommt es, daß gewisse zu den unendlich fernen Stellen gehörende Kurven von F von den italienischen Mathematikern — bei ihrer Behandlungsart mit vollem Recht — nicht berücksichtigt werden, die bei der hier gewählten Betrachtungsweise berücksichtigt werden müssen. Es ist vielleicht gut, darauf noch etwas näher einzugehen. Die Herren *Castelnuovo* und *Enriques* gehen aus von einer Fläche n-ten Grades, in deren Gleichung also das Glied der höchsten Dimension in x, y, z von der n-ten Dimension ist. Es sei etwa

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n \equiv F = 0$$

die Gleichung der Fläche F. Die a_i sind ganze rationale Funktionen von x, y vom Grade i. Betrachten wir die Stellen $x = \infty$, $y = \infty$ und die zu ihr gehörigen Werte von z in der Art, wie es die in dieser Arbeit benutzte Methode verlangt! Wir haben zu setzen

$$\frac{1}{x} = \xi, \qquad \frac{1}{y} = \eta.$$

Es werde gesetzt

$$a_i\left(\frac{1}{\xi}, \frac{1}{\eta}\right) = \frac{\alpha_i(\xi, \eta)}{\xi^i \eta^i},$$

wo dann die α_i ganze rationale Funktionen von ξ, η sind, die mit Gliedern der Dimension i in ξ, η beginnen und höchstens Glieder der Dimension $2i$ enthalten. Statt der Gleichung $F = 0$ bekommen wir die Gleichung

$$F_1 \equiv z^n \xi^n \eta^n + \alpha_1 z^{n-1} \xi^{n-1} \eta^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} \xi^{n-2} \eta^{n-2} + \cdots + \alpha_n = 0.$$

Diese Gleichung wird durch $\xi = \eta = 0$ identisch befriedigt, und das zeigt, daß z für $\xi = \eta = 0$ unbestimmt ist, daß also die durch die Stelle $x = y = \infty$ gehende Parallele zur z-Achse auf der Fläche liegt. Das ist eine von den Kurven, die von den italienischen Mathematikern nicht berücksichtigt wird, während sie bei der hier angewandten Betrachtungsweise berück-

sichtigt werden muß. Ein ganz einfaches Beispiel ist die Ebene mit der Gleichung

$$x + y + z = 0.$$

In der Umgebung des Punktes $x = y = \infty$, $z = 0$ haben wir, indem wir $x = \frac{1}{\xi}$, $y = \frac{1}{\eta}$ setzen,

$$\xi + \eta + \xi\eta z = 0.$$

Setzen wir

(79.) $$\xi = u, \qquad z = v,$$

so haben wir

(80.) $$\eta = -\frac{u}{1+uv} = -u(1 - uv + (uv)^2 - \cdots).$$

Hieraus ersehen wir, daß u die zugeordnete Funktion eines Primteilers $\mathfrak{P}$ ist für die durch die Gleichungen (79.) und (80.) dargestellte Stelle. Für $\mathfrak{P} = 0$ werden x und y beide unendlich, während z veränderlich bleibt. Der Primteiler $\mathfrak{P}$ gehört zu den Primteilern erster Art, da er eine von 1 verschiedene zugeordnete Funktion hat. Die italienischen Mathematiker rechnen ihn aber, und zwar bei ihrer Betrachtungsweise mit vollem Recht, zu den Primteilern zweiter Art oder lassen ihn vielmehr ganz unbeachtet.

Die Frage, ob es möglich ist, eine Fläche in eine solche ohne ausgezeichnete Kurven zu transformieren, ist daher bei der Art, wie hier die unendlich fernen Punkte der Fläche behandelt werden, viel schwieriger zu entscheiden, und ich kann vorläufig keine Antwort darauf geben.

11. Das Verhalten der *Zeuthen-Segre*schen Invariante bei birationaler Transformation.

Zum Schluß sei noch auf das Verhalten der *Zeuthen-Segre*schen Invariante J bei birationaler Transformation eingegangen. Ich muß mich dabei freilich auf den Fall beschränken, wo p_g oder eines der mehrfachen Geschlechte von Null verschieden ist. Das Ergebnis ist das bekannte, *daß*

$$J + (\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$$

bei allen birationalen Transformationen unverändert bleibt. Aber der hier gegebene Beweis macht keine vereinfachenden Voraussetzungen.

Die Definition von J ist unter Zulassung beliebiger Singularitäten folgende*). Es sei G ein Kurvenbüschel auf der algebraischen Fläche F.

*) Vergl. des Verfassers Arbeit über die *Zeuthen-Segre*sche Invariante in den Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo, Bd. 34.

Es sei $\mathfrak{G}$ eine Kurve des Büschels. Es sei $\pi_{\mathfrak{G}}$ das Geschlecht von $\mathfrak{G}$, $\nu_{\mathfrak{G}}$ die Zahl der Kurvenzweige, die durch die mehrfachen Punkte gehen, und $\varrho_{\mathfrak{G}}$ die Zahl dieser Stellen. Wenn $\mathfrak{G}$ zerfällt und etwa ist

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{P}_1^{\lambda_1}\mathfrak{P}_2^{\lambda_2}\mathfrak{P}_3^{\lambda_3}\cdots,$$

wo die $\mathfrak{P}_i$ Primteiler mit den Geschlechten π_i sind, so soll sein

$$\pi_{\mathfrak{G}} - 1 = \Sigma(\pi_i - 1); \tag{81.}$$

ferner soll dann $\nu_{\mathfrak{G}}$ bedeuten die Zahl der Kurvenzweige von $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\cdots$ (also nicht von $\mathfrak{G}$), die durch die mehrfachen Punkte der $\mathfrak{P}_i$ und durch die Schnittpunkte der Primteiler $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \ldots$ gehen, und $\varrho_{\mathfrak{G}}$ die Zahl dieser Stellen. Die Zahlen $\pi_{\mathfrak{G}}, \nu_{\mathfrak{G}}, \varrho_{\mathfrak{G}}$ haben für alle Kurven von G mit Ausnahme einer endlichen Zahl denselben Wert. Es seien π, ν, ϱ diese im allgemeinen geltenden Werte. Wir setzen

$$\delta(\mathfrak{G}) = 2\pi + \nu - \varrho - \{2\pi_{\mathfrak{G}} + \nu_{\mathfrak{G}} - \varrho_{\mathfrak{G}}\}. \tag{82.}$$

Diese Zahl ist nur für eine endliche Zahl von Kurven $\mathfrak{G}$ des Büschels G von Null verschieden. Die Summe aller $\delta(\mathfrak{G})$, die Summe erstreckt über alle Kurven von G, ist also endlich. Diese Summe sei bezeichnet mit δ. Dann ist die *Zeuthen-Segre*sche Invariante J definiert durch

$$J = \delta - 4\pi - 2(\nu - \varrho) - f, \tag{83.}$$

wo f die Zahl der festen Punkte von G ist.

Die Größe J ist nach Herrn *Segre* für alle Kurvenscharen auf F dieselbe. Um zu sehen, wie sich J bei birationaler Transformation ändert, genügt es, eine Transformation zu betrachten, bei der nur eine der Koordinaten durch eine neue ersetzt wird. Denn aus solchen Transformationen läßt sich jede beliebige zusammensetzen. Es werde etwa statt z eine neue Größe ζ eingeführt, es sei also $x = \xi, y = \eta$. Die neue Fläche heißt wie früher Φ. Wir betrachten auf beiden Flächen die Kurvenschar $x =$ konstant. Wir bezeichnen sie als Kurvenschar auf F mit G und als Kurvenschar auf Φ mit G' und bezeichnen überhaupt die Größen, die sich auf G' beziehen, mit denselben Buchstaben wie die entsprechenden Größen von G unter Hinzufügung eines Akzentes.

Die Kurven $x =$ konstant schneiden sich nicht, so daß die Kurvenscharen G und G' keine festen Punkte haben. Nun kann aber eine allgemeine Kurve eines Büschels G höchstens in den festen Punkten mehrfache Punkte haben. Daher ist bei unserer Wahl von G und G'

$$\nu = \varrho = f = 0, \qquad \nu' = \varrho' = f' = 0.$$

Es wird also einfacher

$$J = \delta - 4\pi, \qquad J' = \delta' - 4\pi'.$$

Da aber eine allgemeine Kurve von G und die entsprechende Kurve von G' denselben algebraischen Körper einer Veränderlichen darstellen, so ist $\pi = \pi'$ und daher

$$J - J' = \delta - \delta'. \tag{84.}$$

Für $\mathfrak{a}_i = 0$ werden ξ, η, ζ konstant. Da aber $\xi = x$ ist, so wird für $\mathfrak{A}_i = 0$ die Größe x gleich einer Konstanten, und ebenso wird für $\mathfrak{B}_i = 0$ die Größe ξ konstant. Die Kurven $x =$ konstant, oder die Kurven von G schneiden also die Kurven $\mathfrak{A}_i$ nicht, sondern es gibt unter den Kurven $\mathfrak{G}$ eine und nur eine, die $\mathfrak{A}_i$ als Faktor enthält. Es kann eine Kurve $\mathfrak{G}$ mehrere der $\mathfrak{A}_i$ als Faktoren enthalten. Gehören $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_\mu$ zu derselben Stelle von Φ, so enthält diejenige Kurve $\mathfrak{G}$, die etwa $\mathfrak{a}_1$ enthält, natürlich auch $\mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_\mu$, da für $\mathfrak{a}_2 = 0, \mathfrak{a}_3 = 0, \ldots \mathfrak{a}_\mu = 0$ x denselben Wert annimmt wie für $\mathfrak{a}_1 = 0$. Aber es kann dies $\mathfrak{G}$ auch noch andere der Kurven $\mathfrak{A}_i$ enthalten. Entsprechendes gilt von den Primteilern $\mathfrak{B}_i$ und den Kurven des Büschels G'.

Es sei $\mathfrak{G}$ eine Kurve oder ein ganzer Divisor von G. Es sei etwa $\mathfrak{G}$ teilbar durch $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_\mu$, und es enthalte $\mathfrak{A}_i$ in der Potenz ξ_i. Es sei also etwa

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1^{\xi_1} \mathfrak{A}_2^{\xi_2} \cdots \mathfrak{A}_\mu^{\xi_\mu} \mathfrak{P}_1^{\lambda_1} \mathfrak{P}_2^{\lambda_2} \cdots \mathfrak{P}_r^{\lambda_r},$$

wo die $\mathfrak{P}_i$ Primteiler sind, die von den $\mathfrak{A}_i$ verschieden sind. Der Primteiler $\mathfrak{P}_i$ sei als Primteiler von Φ bezeichnet mit $\mathfrak{P}_i'$. Das Geschlecht von $\mathfrak{P}_i$ und $\mathfrak{P}_i'$ ist dasselbe, nämlich das Geschlecht desjenigen algebraischen Körpers einer Veränderlichen, der diesen Primteilern entspricht. Wir bezeichnen es wie oben mit π_i. Wir setzen zur Abkürzung

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_0 \mathfrak{P},$$

wo der Divisor $\mathfrak{A}_0$ die Primteiler $\mathfrak{A}_i$ und der Divisor $\mathfrak{P}$ die Primteiler $\mathfrak{P}_i$ enthalten soll. Zufolge der hier geltenden einfachen Transformationsformeln (22.) haben wir

$$\mathfrak{A}_0 \frac{\mathfrak{P}}{s\mathfrak{P}} = \mathfrak{a}_0 \frac{\mathfrak{P}'}{s\mathfrak{P}'}, \tag{85.}$$

wenn wir setzen

$$\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_1^{\xi_1} \mathfrak{a}_2^{\xi_2} \cdots \mathfrak{a}_\mu^{\xi_\mu}, \quad \mathfrak{P}' = \mathfrak{P}_1'^{\lambda_1} \mathfrak{P}_2'^{\lambda_2} \cdots \mathfrak{P}_r'^{\lambda_r}. \tag{86.}$$

Unter den Divisoren $\mathfrak{G}$ der Schar G gibt es nur eine endliche Zahl, für die $s\mathfrak{G}$ von 1 verschieden ist, oder die durch einen der Primteiler $\mathfrak{A}_i$ teilbar

sind. Es sei $\mathfrak{G}_0$ ein Divisor von G, für den $s\mathfrak{G}_0 = 1$ ist, und der durch keinen der Primteiler $\mathfrak{A}_i$ teilbar ist. Durch die Transformation geht dann $\mathfrak{G}_0$ über in einen Divisor erster Art $\mathfrak{G}_0'$ in bezug auf Φ, der durch keinen der Primteiler $\mathfrak{a}_i$ oder $\mathfrak{B}_i$ teilbar ist. Es ist also einfach

$$\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{G}_0',$$

und $\mathfrak{G}_0'$ ist ein Divisor der Schar G'. Es geht aber jeder ganze Divisor, der zu $\mathfrak{G}_0$ äquivalent ist, über in einen ganzen Divisor, der zu $\mathfrak{G}_0'$ äquivalent ist, also in einen Divisor erster Art, und zwar in einen Divisor von G'. Dies wenden wir auf unseren Divisor $\mathfrak{G}$ an.

Es wird nach (85.), wenn wir

$$s\mathfrak{P} = \mathfrak{b}_1^{\eta_1}\mathfrak{b}_2^{\eta_2}\cdots\mathfrak{b}_\varkappa^{\eta_\varkappa}$$

setzen,

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_0\mathfrak{P} = \frac{\mathfrak{a}_0}{s\mathfrak{P}'}\mathfrak{B}_1^{\eta_1}\mathfrak{B}_2^{\eta_2}\cdots\mathfrak{B}_\varkappa^{\eta_\varkappa}\mathfrak{P}' = \mathfrak{G}'.$$

Wie wir gesehen haben, muß $\mathfrak{G}'$ ein Divisor erster Art in bezug auf Φ sein. Also ist

$$s\mathfrak{P}' = \mathfrak{a}_0$$

und daher

$$\mathfrak{G}' = \mathfrak{B}_1^{\eta_1}\mathfrak{B}_2^{\eta_2}\cdots\mathfrak{B}_\varkappa^{\eta_\varkappa}\mathfrak{P}' = \mathfrak{B}_0\mathfrak{P}'.$$

Es entspricht also jedem Divisor $\mathfrak{G}$ von G ein ganz bestimmter Divisor $\mathfrak{G}'$ von G'. Wir berechnen die Differenz der Beiträge, die $\mathfrak{G}$ zu δ und $\mathfrak{G}'$ zu δ' liefern. Diese Beiträge sind zu berechnen nach (82.). Da weder G noch G' feste Punkte haben, so ist, wie schon oben angegeben, $\nu = \varrho = 0$ zu setzen. Ferner ist π das Geschlecht einer allgemeinen $\mathfrak{G}$, und das ist gleich dem einer allgemeinen $\mathfrak{G}'$. Also wird mit einer kleinen Änderung der Bezeichnung

$$(87.)\quad \delta(\mathfrak{G}) - \delta(\mathfrak{G}') = 2\pi(\mathfrak{G}') + \nu(\mathfrak{G}') - \varrho(\mathfrak{G}') - \tfrac{1}{i}\{2\pi(\mathfrak{G}) + \nu(\mathfrak{G}) - \varrho(\mathfrak{G})\}.$$

Es ist, wenn wir bedenken, daß die Primteiler $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{B}_i$ das Geschlecht Null haben, nach (81.)

$$\pi(\mathfrak{G}') - 1 = \Sigma(\pi_{\mathfrak{B}_i} - 1) + \Sigma(\pi_{\mathfrak{P}_i'} - 1) = \Sigma(\pi_{\mathfrak{P}_i'} - 1) - \varkappa,$$

$$\pi(\mathfrak{G}) - 1 = \Sigma(\pi_{\mathfrak{A}_i} - 1) + \Sigma(\pi_{\mathfrak{P}_i} - 1) = \Sigma(\pi_{\mathfrak{P}_i} - 1) - \mu.$$

Beachten wir ferner, daß $\mathfrak{P}_i$ und $\mathfrak{P}_i'$ dasselbe Geschlecht haben, so wird

$$(88.)\qquad \pi(\mathfrak{G}') - \pi(\mathfrak{G}) = \mu - \varkappa.$$

Zu $\nu(\mathfrak{G}) - \varrho(\mathfrak{G})$ liefern einen Beitrag alle diejenigen Stellen, wo die in dem Divisor

(89.) $$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \cdots \mathfrak{A}_\mu \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \cdots \mathfrak{P}_r$$

enthaltenen Primteiler einen mehrfachen Punkt haben oder sich schneiden. Wir wollen noch hinzunehmen diejenigen Stellen, zu denen die Primteiler $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots \mathfrak{b}_\varkappa$ gehören, soweit sie nicht schon dazu gehören. Das können wir tun, ohne irgend etwas zu ändern. Denn wenn die betreffende Stelle nicht schon beitragspflichtig ist, so geht durch sie höchstens ein Zweig des Divisors (89.), aber auch mindestens einer. Denn sonst könnte $s\mathfrak{P}$ nicht die Primteiler $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots \mathfrak{b}_\varkappa$ alle enthalten, wie wir doch angenommen haben. Geht aber durch die Stelle genau ein Zweig des Divisors (89.), so liefert diese Stelle zu $\nu(\mathfrak{G}) - \varrho(\mathfrak{G})$ den Beitrag $1 - 1 = 0$, und wir können sie also beitragspflichtig sein lassen.

Jede dieser Stellen liefert zu ν als Beitrag die Zahl der Zweige des Divisors (89.), die durch die Stelle gehen, und zu ϱ den Beitrag 1.

Ebenso lassen wir zu $\nu(\mathfrak{G}') - \varrho(\mathfrak{G}')$ die Stellen beitragspflichtig sein, zu denen die Primteiler $\mathfrak{a}_i$ gehören, soweit sie es nicht schon sind. An die Stelle des Divisors (89.) tritt der Divisor

(90.) $$\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \cdots \mathfrak{B}_\varkappa \mathfrak{P}_1' \mathfrak{P}_2' \cdots \mathfrak{P}_r'.$$

Zunächst können wir von den beitragspflichtigen Stellen diejenigen fortlassen, die nicht zu den Stellen $\mathfrak{a}_i$ oder $\mathfrak{b}_i$ gehören, und durch die keine der Kurven $\mathfrak{A}_i$ oder $\mathfrak{B}_i$ hindurchgeht. Denn diese liefern zu $\nu(\mathfrak{G}) - \varrho(\mathfrak{G})$ und $\nu(\mathfrak{G}') - \varrho(\mathfrak{G}')$ denselben Beitrag, nämlich die Zahl der durch diese Stellen gehenden Zweige von $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \cdots \mathfrak{P}_r$ oder $\mathfrak{P}_1' \mathfrak{P}_2' \cdots \mathfrak{P}_r'$, vermindert um die Zahl der Stellen. In der Differenz (87.) hebt sich also der Beitrag dieser Stellen fort.

Da die Kurven $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{B}_i$ in dem hier betrachteten Falle keine mehrfachen Punkte haben, und da ferner keine der Kurven $\mathfrak{A}_i$ durch eine der Stellen $\mathfrak{b}_i$ und keine der Kurven $\mathfrak{B}_i$ durch eine der Stellen $\mathfrak{a}_i$ geht, so bleiben als beitragspflichtig nur übrig

zu $\nu(\mathfrak{G}) - \varrho(\mathfrak{G})$:

1. die Stellen, wo die $\mathfrak{A}_i$ sich untereinander oder die $\mathfrak{P}_i$ schneiden, und
2. die Stellen, zu denen die $\mathfrak{b}_i$ gehören,

und zu $\nu(\mathfrak{G}') - \varrho(\mathfrak{G}')$:

3. die Stellen, wo die $\mathfrak{B}_i$ sich untereinander oder die $\mathfrak{P}_i'$ schneiden, und
4. die Stellen, zu denen die $\mathfrak{a}_i$ gehören.

Der Beitrag, den die $\mathfrak{P}_i$ zu $\nu(\mathfrak{G})$ liefern, ist gleich der Zahl der Zweige von $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \cdots \mathfrak{P}_r$, die durch diese Stelle gehen. Jeder dieser Zweige

wird aber transformiert nach einer der Stellen unter 3., 4. und umgekehrt. Also ist der Beitrag, den die $\mathfrak{P}_i$ zu $\nu(\mathfrak{G})$ liefern, genau derselbe, wie der Beitrag, den die $\mathfrak{P}_i'$ zu $\nu(\mathfrak{G}')$ liefern. Wir können diesen Beitrag also fortlassen, da er sich in der Differenz (87.) doch forthebt.

Wir können jetzt diejenigen Stellen von ihrer Beitragspflicht befreien, wo ein $\mathfrak{A}_i$ eine der Kurven $\mathfrak{P}_i$ schneidet, ohne daß durch die Stelle mehr als ein $\mathfrak{A}_i$ hindurchgeht. Denn da wir den Beitrag der $\mathfrak{P}_i$ fortlassen wollen, so liefert diese Stelle zu ν den Beitrag 1 und zu ϱ den Beitrag 1, also zu $\nu - \varrho$ den Beitrag 0. Ebenso können wir die Stellen fortlassen, wo nur *ein* $\mathfrak{B}_i$ eine oder mehrere der Kurven $\mathfrak{P}_i'$ schneidet.

Zu der Differenz

$$\nu(\mathfrak{G}') - \varrho(\mathfrak{G}') - |\nu(\mathfrak{G}) - \varrho(\mathfrak{G})|$$

sind also noch beitragspflichtig

1. die Stellen, wo die $\mathfrak{A}_i$ sich schneiden, 2. die Stellen $\mathfrak{b}_i$,
3. die Stellen, wo die $\mathfrak{B}_i$ sich schneiden, 4. die Stellen $\mathfrak{a}_i$,

die Stellen unter 1. und 2. zu $\nu(\mathfrak{G}) - \varrho(\mathfrak{G})$, die unter 3. und 4. zu $\nu(\mathfrak{G}') - \varrho(\mathfrak{G}')$. Der Beitrag jeder Stelle 1. zu $\nu(\mathfrak{G}) - \varrho(\mathfrak{G})$ ist gleich der Zahl der durch diese Stelle gehenden Zweige von $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \cdots \mathfrak{A}_\mu$, vermindert um 1. Wir haben aber nachgewiesen, daß sich immer nur zwei der Kurven $\mathfrak{A}_i$ an einer Stelle schneiden. Jede dieser Stellen liefert also zu $\nu - \varrho$ den Beitrag 1. Im ganzen ist also der Beitrag gleich der Zahl der Schnittpunkte der Kurven $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_\mu$, die mit s bezeichnet sei. Ebenso ist der Beitrag der Stellen unter 3. zu $\nu(\mathfrak{G}') - \varrho(\mathfrak{G}')$ gleich der Zahl der Schnittpunkte der Kurven $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots \mathfrak{B}_\varkappa$, die mit s' bezeichnet sei.

Die Stellen 2. liefern zu ν keinen Beitrag, da durch sie keine der Kurven $\mathfrak{A}_i$ geht. Zu ϱ liefern sie wie jede beitragspflichtige Stelle den Beitrag 1. Die Zahl dieser Stellen, die nicht gleich $\varkappa$ zu sein braucht, da mehrere $\mathfrak{b}_i$ zu derselben Stelle gehören können, sei t'. Der Beitrag der Stellen 2. zu $\nu(\mathfrak{G}) - \varrho(\mathfrak{G})$ ist dann $-t'$. Ist t die Zahl der voneinander verschiedenen Stellen, zu denen die $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_\mu$ gehören, so ist ebenso der Beitrag der Stellen 4. zu $\nu(\mathfrak{G}') - \varrho(\mathfrak{G}')$ gleich $-t$.

Danach wird

$$\delta(\mathfrak{G}) - \delta(\mathfrak{G}') = 2\mu - 2\varkappa + s' - t - (s - t').$$

Summieren wir über alle $\mathfrak{G}$ und die zugehörigen $\mathfrak{G}'$, so bekommen wir $\delta - \delta'$. Bedenken wir, daß jedes $\mathfrak{A}_i$ in einem und nur in einem $\mathfrak{G}$ und jedes $\mathfrak{B}_i$

in einem und nur in einem $\mathfrak{G}'$ enthalten ist, daß ferner zwei $\mathfrak{A}_i$, die in verschiedenen Kurven $\mathfrak{G}$ enthalten sind, und ebenso zwei $\mathfrak{B}_i$, die in verschiedenen $\mathfrak{G}'$ enthalten sind, sich nicht schneiden, so haben wir folgendes:

Es ist $\Sigma\mu$ gleich der Zahl aller $\mathfrak{A}_i$, gleich m, $\Sigma\varkappa$ gleich der Zahl aller $\mathfrak{B}_i$, gleich n, Σt gleich der Zahl der voneinander verschiedenen Stellen $\mathfrak{a}_i$, die mit $\overline{m}$ bezeichnet ist, und $\Sigma t'$ gleich der Zahl der verschiedenen Stellen $\mathfrak{b}_i$, die wir mit $\overline{n}$ bezeichneten. Ferner ist Σs gleich der Zahl aller Schnittpunkte der Kurven $\mathfrak{A}_i$, also nach (76.) gleich $m - \overline{m}$, ebenso ist $\Sigma s' = n - \overline{n}$.

Danach wird

$$\begin{aligned}\delta - \delta' &= 2m - 2n + (n - \overline{n}) - \overline{m} - |(m - \overline{m}) - \overline{n}| \\ &= m - n,\end{aligned}$$

also nach (84.)

$$J - J' = \delta - \delta' = m - n$$

oder

$$J - m = J' - n.$$

Vergleichen wir hiermit die Gleichung (78.)

$$(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) + m = (\mathfrak{K}', \mathfrak{K}') + n,$$

so folgt

$$J + (\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) = J' + (\mathfrak{K}', \mathfrak{K}'),$$

oder:

Die Größe $J + (\mathfrak{K}, \mathfrak{K})$ ***ist bei birationalen Transformationen unveränderlich.***

Über die Differentialgleichungen, welche den Gleichgewichtszustand eines gasförmigen Himmelskörpers bestimmen, dessen Teile gegeneinander nach dem *Newton*schen Gesetze gravitieren.

Von Herrn *H. Lemke* in Berlin-Wilmersdorf.

Im Gegensatz zur Theorie des Gleichgewichts der tropfbar flüssigen Massen, die von vielen Mathematikern zum Gegenstande umfangreicher Untersuchungen gemacht worden ist, scheint das entsprechende Problem für die Gase eine weit geringere Beachtung gefunden zu haben. Es ist aber für das Verständnis gewisser astronomischer Erscheinungen von Wichtigkeit, die Frage zu beantworten, ob es für einen gasförmigen Körper, dessen Teile sich nach dem *Newton*schen Gesetze anziehen, einen Gleichgewichtszustand gibt. Derartige Gasmassen sind z. B. die Atmosphären der Gestirne sowie die kosmischen Nebel, über deren Struktur und Ausdehnung die Himmelsphotographie vielfach Auskunft gegeben hat.

Die Aufgabe, die in dieser Abhandlung in Angriff genommen werden soll, läßt sich folgendermaßen formulieren: Im Raume sind eine Anzahl fester Körper von unveränderlicher Lage und endlicher Gesamtmasse gegeben. Dazwischen breitet sich ein homogenes Gas aus, welches dem *Mariotte-Gay-Lussac*schen Gesetze unterworfen ist, und dessen Teile gegeneinander und gegen die festen Körper nach dem *Newton*schen Gesetze gravitieren. Es sind die Bedingungen anzugeben, die Druck und Temperatur des Gases in jedem Punkt des Raumes erfüllen müssen, damit Gleichgewicht besteht.

Es bietet keine Schwierigkeiten, die partiellen Differentialgleichungen für die beiden genannten Funktionen aufzustellen; aber im allgemeinen lassen sich daraus nur wenige Schlüsse ziehen, und es ist daher zweckmäßig, das Problem durch geeignete Spezialisierungen zu vereinfachen.

Den besonderen Fall, daß die Temperatur im ganzen Raume dieselbe ist, habe ich bereits in einer früheren Arbeit*) behandelt. Es zeigt sich, daß der Logarithmus des Gasdruckes der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -2\lambda \cdot e^u$$

zu genügen hat, wo λ eine Konstante bedeutet. Im Verlaufe der folgenden Untersuchungen wird aber die Voraussetzung gemacht werden, daß die Flächen konstanten Druckes und konstanter Temperatur konzentrische Kugeln sind, d. h. also, daß sich beide Größen als Funktionen der Entfernung von einem festen Punkte darstellen lassen. In diesem Falle gehen die partiellen Differentialgleichungen in gewöhnliche über.

Die Temperaturverteilung innerhalb der Gaskugel ist, wenn keine besonderen Hypothesen gemacht werden, ganz willkürlich. Es gibt aber zwei Spezialfälle, die es verdienen, genauer untersucht zu werden. Man kann erstens annehmen, daß die absolute Temperatur irgendeiner beliebigen Potenz der Entfernung vom Zentrum der Gaskugel proportional ist; zweitens kann man voraussetzen, daß zwischen Druck, Dichtigkeit und Temperatur diejenigen Gleichungen bestehen, welche einer adiabatischen Zustandsänderung des Gases entsprechen.

Wenn die erstgenannte Hypothese zugrunde gelegt wird, genügt der Logarithmus des Druckes einer Differentialgleichung von der Form

$$\frac{d^2 u}{d\varrho^2} + \frac{\varkappa}{\varrho} \cdot \frac{du}{d\varrho} = -2\lambda \cdot e^u,$$

wo $\varkappa$ und λ Konstanten sind. Es ist bemerkenswert, daß man daraus durch eine einfache Transformation die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = c_0 + 3c_1 \cdot y + 3c_2 \cdot y^2 + c_3 \cdot y^3$$

erhält, in der die Koeffizienten c_k spezielle Funktionen der Variabeln x sind. Diese Klasse von Differentialgleichungen ist besonders von den Herren *Appell***) und *R. Liouville****) zum Gegenstande eingehender Untersuchungen gemacht worden.

---

*) Dieses Journal, Bd. 124, S. 143–151.

**) *P. Appell.* Sur les invariants de quelques équations différentielles. Journal de Mathématiques, IV. Série, Tome 5, p. 361—423.

***) *R. Liouville.* Sur une équation différentielle du premier ordre. Acta Mathematica, Bd. 27, p. 55—78.

Ist die absolute Temperatur der *ersten* Potenz der Entfernung umgekehrt proportional, so findet man für den Logarithmus des Druckes die Gleichung

$$\frac{d^2u}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{du}{d\varrho} = -2\lambda \cdot e^u.$$

und das führt zur Aufdeckung eines anderen Zusammenhanges. Diese Differentialgleichung zweiter Ordnung steht nämlich, wie *H. Poincaré* gezeigt hat, in enger Beziehung zur Theorie der *Fuchs*schen Funktionen*).

Die Darlegung dieser Zusammenhänge bildet den Inhalt der ersten Kapitel der Abhandlung. Dann folgen Untersuchungen über die Integration der Differentialgleichungen. In einigen Fällen gelingt es, die Integrale in geschlossener Form darzustellen. Aber im allgemeinen muß man Reihenentwickelungen herleiten, die in der Umgebung einer singulären Stelle konvergieren. Zur Verwendung kommen dabei Methoden, die von *Poincaré* und Herrn *Horn* ausgebaut worden sind**). Ich verdanke Herrn *Schlesinger* den Hinweis darauf, daß diese Methoden hier mit Erfolg zur Anwendung gebracht werden können.

Wenn man von der zweiten Hypothese ausgeht, daß zwischen Druck, Dichtigkeit und Temperatur die Beziehungen bestehen, welche einer adiabatischen Zustandsänderung des Gases entsprechen, erhält man Differentialgleichungen von ganz anderer Form. Mit diesem Problem hat sich bereits *Helmholtz* ***) beschäftigt; aber seine Gleichungen sind nur Näherungsformeln. In den letzten Kapiteln dieser Abhandlung wird die Frage von einem allgemeineren Standpunkte aus diskutiert werden und insbesondere festgestellt werden, ob es möglich ist, unter den angegebenen Voraussetzungen eine obere Grenze für die Atmosphäre der Erde anzunehmen.

---

*) *H. Poincaré.* Sur les fonctions fuchsiennes et l'équation $\Delta u = e^u$. Journal de Mathématiques, V. Série, Tome 4, p. 147—148. Vgl. *L. Schlesinger*, Archiv der Math. u. Physik, III. Reihe, Bd. I, S. 262 ff.

**) *H. Poincaré.* Note sur les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles. Journal de l'école polytechnique, cah. 45, p. 13—26. — *E. Picard.* Traité d'analyse, Tome 3, p. 23 ff. — *J. Horn.* Gewöhnliche Differentialgleichungen, S. 319 ff.

***) *H. von Helmholtz.* Vorlesungen über die Theorie der Wärme, S. 197—201.

I. Aufstellung der Differentialgleichungen.

Es sei p der Druck, ε die Dichtigkeit und ϑ die Temperatur des Gases im Punkte (x, y, z) des Raumes. Dann bestehen die hydrostatischen Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \varepsilon \cdot X, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \varepsilon \cdot Y, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \varepsilon \cdot Z,$$

wo X, Y, Z die Komponenten der Kräfte sind, die auf das Gasteilchen einwirken. Man kann diese Kräfte in zwei Teile zerlegen: erstens in die Komponenten, welche von der Attraktion fester Körper herrühren, die in der Gasmasse verteilt sind; diese seien

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial z};$$

zweitens in die Komponenten der Anziehungskräfte der Gasmasse selbst; sie mögen mit

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z}$$

bezeichnet werden. Für die Druckkomponenten ergeben sich also die Gleichungen

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \varepsilon \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \varepsilon \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \varepsilon \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial z}\right).$$

Wenn das Gas dem *Mariotte-Gay-Lussac*schen Gesetze unterworfen ist, besteht zwischen dem Druck, der Dichtigkeit und der absoluten Temperatur die Gleichung

$$p = c \cdot \varepsilon \cdot \vartheta,$$

wo c eine positive Konstante ist. Berechnet man daraus die Dichtigkeit ε und setzt den erhaltenen Wert in die Ausdrücke für die Druckkomponenten ein, so wird

$$c \cdot \vartheta \cdot \frac{\partial \log p}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x}, \quad c \cdot \vartheta \cdot \frac{\partial \log p}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y},$$

$$c \cdot \vartheta \cdot \frac{\partial \log p}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Diese Relationen werden nach x, bez. y und z differenziert und addiert. Man erhält die partielle Differentialgleichung

$$c \cdot \vartheta \cdot \Delta \log p + c \cdot \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \log p}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \cdot \frac{\partial \log p}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \cdot \frac{\partial \log p}{\partial z}\right) = \Delta U + \Delta V.$$

Der Punkt (x, y, z) ist für die festen Körper ein äußerer, für die Gasmasse ein innerer. Demnach ist auf Grund bekannter Sätze aus der Theorie des *Newton*schen Potentials

$$\Delta U = 0, \quad \Delta V = -4\pi f \cdot \varepsilon,$$

wo f die Gravitationskonstante ist. Für ε setzt man wiederum seinen Wert aus der Gasgleichung ein, für $\log p$ die Abkürzung u. Dann ist

$$(1.) \quad c \cdot \vartheta \cdot \Delta u + c \cdot \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{4\pi f}{c \cdot \vartheta} \cdot e^u.$$

Wenn die Temperatur innerhalb des Gases überall denselben Wert hat, nimmt die partielle Differentialgleichung eine einfachere Form an, nämlich

$$\Delta u = -\frac{4\pi f}{c^2 \cdot \vartheta^2} \cdot e^u.$$

Im folgenden soll jedoch die allgemeine Annahme beibehalten werden, daß die Temperatur eine Funktion der Koordinaten x, y, z ist, die sich nicht auf eine Konstante reduziert. Es soll aber vorausgesetzt werden, daß Temperatur, Druck und Dichtigkeit nur von der Entfernung $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ abhängen. Für die Funktion u ergibt sich dann die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{du}{dr} + \frac{d \log \vartheta}{dr} \cdot \frac{du}{dr} = -\frac{4\pi f}{c^2 \cdot \vartheta^2} \cdot e^u.$$

Die Funktion ϑ von r ist zunächst ganz willkürlich; aber wie schon in der Einleitung erwähnt wurde, schließen sich die weiteren Untersuchungen an den besonderen Fall an, daß die absolute Temperatur einer Potenz der Entfernung proportional ist;

$$(1^a.) \qquad \vartheta = a \cdot r^{-\alpha}.$$

a und α sind zwei Konstanten, von denen a positiv angenommen werden muß, während α positive oder negative Werte haben kann. Die entstehende Differentialgleichung

$$(2.) \qquad \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2-\alpha}{r} \cdot \frac{du}{dr} = -\frac{4\pi f}{a^2 \cdot c^2} \cdot r^{2\alpha} \cdot e^u$$

läßt sich, wenn $\alpha + 1$ nicht gleich Null ist, mittels der Transformation

$$\varrho = r^{\alpha+1}$$

in die einfachere Gestalt

$$(3.) \quad \frac{d^2 u}{d\varrho^2} + \frac{2}{\alpha+1} \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{du}{d\varrho} = -2\lambda \cdot e^u, \qquad \lambda = \frac{2\pi f}{a^2 \cdot c^2 \cdot (\alpha+1)^2},$$

überführen. Die Integration dieser Gleichung bildet die Hauptaufgabe der folgenden Untersuchungen.

Es ist zweckmäßig, schon an dieser Stelle darauf hinzuweisen, daß die Differentialgleichung (3.) ein einfaches partikuläres Integral besitzt. Man findet nämlich

$$u = -2 \cdot \log \varrho + \log\left(\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right).$$

Daraus ergibt sich für den Druck p als Funktion von r die Gleichung

$$p = \frac{a^2 \cdot c^2 \cdot (1-\alpha^2)}{2\pi f} \cdot \frac{1}{r^{2\alpha+2}}.$$

Das Integral hat aber nur dann einen physikalischen Sinn, wenn der Exponent α zwischen den Grenzen -1 und $+1$ liegt. Ist der absolute Betrag von α größer als Eins, so würde der Druck negativ werden.

II. Reduktion der Differentialgleichung zweiter Ordnung auf eine Gleichung erster Ordnung.

Die Gleichung

$$\frac{d^2u}{d\varrho^2} + \frac{\varkappa}{\varrho} \cdot \frac{du}{d\varrho} = -2\lambda \cdot e^u, \tag{4.}$$

in der die Konstanten $\varkappa$ und λ die Werte

$$\varkappa = \frac{2}{\alpha+1}, \quad \lambda = \frac{2\pi f}{a^2 \cdot c^2 \cdot (\alpha+1)^2}$$

haben, läßt sich in eine Differentialgleichung erster Ordnung transformieren, wenn man an Stelle der beiden Variablen u und ϱ zwei neue Veränderliche x und y mittels der Gleichungen

$$x = \varrho^2 \cdot e^u, \quad y = \varrho \cdot \frac{du}{d\varrho}$$

einführt. Um die gesuchte Gleichung zwischen den drei Größen $\frac{dy}{dx}$, y und x zu erhalten, verfährt man folgendermaßen: Aus $\frac{du}{d\varrho} = \frac{y}{\varrho}$ folgt durch Differentiation

$$\frac{d^2u}{d\varrho^2} = -\frac{y}{\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{d\varrho}.$$

Wenn man $\frac{dx}{d\varrho}$ aus der Gleichung $x = \varrho^2 \cdot e^u$ berechnen will, muß man berücksichtigen, daß auf Grund der gegebenen Differentialgleichung u als Funktion von ϱ zu betrachten ist.

$$\frac{dx}{d\varrho} = 2\varrho \cdot e^u + \varrho^2 \cdot e^u \cdot \frac{du}{d\varrho} = \frac{2x}{\varrho} + \frac{x \cdot y}{\varrho}.$$

Unter Benutzung dieses Ausdruckes erhält man

$$\frac{d^2u}{d\varrho^2} + \frac{\varkappa}{\varrho} \cdot \frac{du}{d\varrho} = \frac{1}{\varrho^2} \cdot \left(2x \cdot \frac{dy}{dx} + x \cdot y \cdot \frac{dy}{dx} - y + \varkappa \cdot y\right).$$

Die rechte Seite der Differentialgleichung ist

$$-2\lambda \cdot e^u = -\frac{2\lambda \cdot x}{\varrho^2}.$$

Wenn man die gefundenen Werte für die linke und rechte Seite einander gleich setzt, hebt sich der Nenner ρ^2 heraus. Man löst die Gleichung nach $\frac{dy}{dx}$ auf und findet

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\lambda \cdot x + (\varkappa - 1) \cdot y}{x \cdot (y+2)}. \tag{5.}$$

Eine andere bemerkenswerte Form der Differentialgleichung erster Ordnung ergibt sich durch die Transformation

$$2\lambda \cdot x + (\varkappa - 1) \cdot y = \frac{1}{\zeta},$$

mit deren Hilfe man die Variable x eliminieren kann. Es entsteht die Differentialgleichung

$$\frac{d\zeta}{dy} = (y + 3 - \varkappa) \cdot \zeta^2 - (\varkappa - 1) \cdot y \cdot (y+2) \cdot \zeta^3, \tag{6.}$$

welche zu einer Klasse von Gleichungen gehört, deren Integration wiederholt zum Gegenstande eingehender Untersuchungen gemacht worden ist, ohne daß es bisher gelungen wäre, zu einem abschließenden Ergebnis zu gelangen. —

Wenn eine Differentialgleichung von der Form

$$\frac{d\zeta}{dy} = c_0 + 3c_1 \cdot \zeta + 3c_2 \cdot \zeta^2 + c_3 \cdot \zeta^3$$

gegeben ist, in der die Koeffizienten c_0, c_1, c_2, c_3 Funktionen der unabhängigen Variablen y sind, so kann man sie mittels der Transformation

$$\zeta = Z \cdot U(y) + V(y), \quad \frac{dY}{dy} = M(y)$$

in die kanonische Form

$$\frac{dZ}{dY} = Z^3 + I$$

überführen, wenn man nur die Funktionen $U(y)$, $V(y)$, $M(y)$ in geeigneter Weise bestimmt. Herr *Appell**) hat gezeigt, daß sich $U(y)$, $V(y)$, $M(y)$ durch Quadraturen aus c_0, c_1, c_2, c_3 berechnen lassen, und daß I und Y absolute Invarianten sind für alle Transformationen von der Gestalt

$$\zeta = z \cdot u(y) + v(y), \quad \frac{d\eta}{dy} = \mu(y).$$

Es bietet keine Schwierigkeiten, die Differentialgleichung (6.) in der angegebenen Weise zu transformieren und die Invarianten I und Y zu be-

*) Journal de Mathématiques, IV. Série, Tome 5, p. 367—371.

rechnen; aber es hat den Anschein, daß im vorliegenden Falle die Herstellung der kanonischen Form für das Integrationsproblem nicht von erheblichem Nutzen ist.

III. Fälle, in denen die Integrale der Differentialgleichung in geschlossener Form darstellbar sind.

Es ist im allgemeinen nicht möglich, die Integrale der Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{d\varrho^2} + \frac{\varkappa}{\varrho} \cdot \frac{du}{d\varrho} = -2\lambda \cdot e^u \tag{4.}$$

ohne Zuhilfenahme von Reihenentwickelungen herzustellen. Nur wenn die Konstante $\varkappa$ gleich 1 oder 0 ist, gelingt es, das Integral u in geschlossener Form durch bekannte Funktionen auszudrücken. Der erste Fall entspricht dem Werte $\alpha = 1$; es ist dann innerhalb der Gasmasse die absolute Temperatur dem Abstande vom Mittelpunkte der Kugel umgekehrt proportional. Die zweite Annahme, $\varkappa = 0$, würde zur Folge haben, daß α unendlich groß ist. Obwohl dieser Fall keine physikalische Bedeutung hat, soll er doch eingehend untersucht werden, und zwar mit Rücksicht auf die Integration der Differentialgleichung

$$\frac{d\zeta}{dy} = (y+3) \cdot \zeta^2 + y \cdot (y+2) \cdot \zeta^3.$$

Es sei also zunächst $\varkappa = 1$. Dann läßt sich die Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{du}{d\varrho} = -2\lambda \cdot e^u \tag{7.}$$

durch die Substitutionen $x = \varrho^2 \cdot e^u$, $y = \varrho \cdot \frac{du}{d\varrho}$ in die Gleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\lambda}{y+2}$$

verwandeln. Durch eine Quadratur findet man das allgemeine Integral

$$y^2 + 4y + 2C = -4\lambda \cdot x,$$

wo C eine willkürliche Konstante bedeutet. Setzt man für x und y wieder die angegebenen Werte ein, so wird

$$\varrho^2 \cdot \left(\frac{du}{d\varrho}\right)^2 + 4\varrho \cdot \frac{du}{d\varrho} + 2C = -4\lambda \cdot \varrho^2 \cdot e^u.$$

Andererseits ergibt sich aus der gegebenen Differentialgleichung (7.)

$$-4\lambda \cdot \varrho^2 \cdot e^u = 2\varrho^2 \cdot \frac{d^2u}{d\varrho^2} + 2\varrho \cdot \frac{du}{d\varrho}.$$

Infolgedessen ist

$$\frac{d^2u}{d\varrho^2} - \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{du}{d\varrho} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{du}{d\varrho}\right)^2 - \frac{C}{\varrho^2} = 0.$$

Man erhält also für $\frac{du}{d\varrho}$ eine *Riccati*sche Differentialgleichung. Durch die Substitution

$$u = -2\cdot\log w + \log\tau,$$

wo τ eine noch zu bestimmende Konstante ist, findet man endlich die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2w}{d\varrho^2} - \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{dw}{d\varrho} + \frac{C}{2\varrho^2}\cdot w = 0.$$

Das allgemeine Integral der letzteren ist

$$w = \gamma_1\cdot\varrho^{\beta_1} + \gamma_2\cdot\varrho^{\beta_2}.$$

γ_1 und γ_2 sind willkürliche Integrationskonstanten, β_1 und β_2 aber Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\beta^2 - 2\beta + \tfrac{1}{2}\cdot C = 0. \qquad (8.)$$

Da C eine willkürliche Konstante ist, können die Wurzeln β_1 und β_2 verschieden oder gleich sein, je nachdem $C \neq 2$ oder $C = 2$ ist. Es soll zunächst angenommen werden, C sei nicht gleich 2. In diesem Falle ist

$$u = -2\cdot\log\left(\gamma_1\cdot\varrho^{\beta_1} + \gamma_2\cdot\varrho^{\beta_2}\right) + \log\tau.$$

Die Größe τ ist von den Konstanten γ_1 und γ_2 nicht unabhängig; denn setzt man die Funktion u in die gegebene Differentialgleichung (7.) ein, so erhält man nur dann eine identische Gleichung, wenn

$$\tau = \frac{\gamma_1\cdot\gamma_2\cdot(4-2C)}{\lambda}$$

ist. Daraus folgt, daß u auch in der Form

$$u = -2\cdot\log\left(\varrho^{\beta_1}\cdot\sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}} + \varrho^{\beta_2}\cdot\sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}}\right) + \log\left(\frac{4-2C}{\lambda}\right) \qquad (9.)$$

geschrieben werden kann. Das Integral enthält zwei willkürliche Konstanten, erstens den Quotienten $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ und zweitens die Größe C; letztere kommt im zweiten Summanden explizite vor, im ersten Summanden aber auch in den Exponenten β_1 und β_2. Das Integral u ist demnach die allgemeinste Funktion, die der Differentialgleichung (7.) genügt, vorausgesetzt, daß C nicht gleich 2 ist.

Wenn beide Wurzeln β_1 und β_2 der quadratischen Gleichung (8.) reell sind, ist die oben angegebene Form für die Funktion u die zweck-

mäßigste. Es ist aber auch möglich, daß β_1 und β_2 komplexe Zahlen sind, nämlich wenn $C > 2$ gewählt wird. Setzt man in diesem Falle zur Abkürzung

$$\omega = \sqrt{\tfrac{1}{2}C - 1},$$

so ist

$$\beta_1 = 1 + i \cdot \omega, \quad \beta_2 = 1 - i \cdot \omega;$$

ferner

$$\varrho^{\beta_1} = \varrho \cdot \{\cos(\omega \cdot \log \varrho) + i \cdot \sin(\omega \cdot \log \varrho)\},$$
$$\varrho^{\beta_2} = \varrho \cdot \{\cos(\omega \cdot \log \varrho) - i \cdot \sin(\omega \cdot \log \varrho)\}.$$

Für die willkürliche Konstante $\sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}}$ kann man eine komplexe Zahl mit dem Modul Eins nehmen; dann wird

$$\sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}} = a + b \cdot i, \quad \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}} = a - b \cdot i, \quad a^2 + b^2 = 1.$$

Führt man diese Ausdrücke in die Funktion u ein, so erhält man

$$(10.)\quad u = -2 \cdot \log\{2\varrho \cdot a \cdot \cos(\omega \cdot \log \varrho) - 2\varrho \cdot b \cdot \sin(\omega \cdot \log \varrho)\} + \log\left(\frac{4 - 2C}{\lambda}\right).$$

Alle Glieder sind hier reell, und es treten nur zwei willkürliche Konstanten auf, da zwischen a und b eine Gleichung besteht.

Die bisher aufgestellten Ausdrücke für das Integral u verlieren ihre Gültigkeit, wenn die Integrationskonstante $C = 2$ ist. Es entsteht die Frage, welche Form das Integral der Differentialgleichung

$$(7.)\quad \frac{d^2u}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{du}{d\varrho} = -2\lambda \cdot e^u$$

in diesem Falle besitzt. Die Gleichung für w hat die Gestalt

$$\frac{d^2w}{d\varrho^2} - \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dw}{d\varrho} + \frac{w}{\varrho^2} = 0,$$

und ihr allgemeines Integral ist

$$w = \gamma_1 \cdot \varrho + \gamma_2 \cdot \varrho \cdot \log \varrho,$$

wo γ_1 und γ_2 willkürliche Konstanten bezeichnen. Setzt man diesen Ausdruck in $u = -2 \cdot \log w + \log \tau$ ein, so überzeugt man sich leicht, daß die Funktion

$$u = -2 \cdot \log \varrho - 2 \cdot \log(\gamma_1 + \gamma_2 \cdot \log \varrho) + \log \tau$$

nur dann der gegebenen Differentialgleichung (7.) genügt, wenn die Konstante

$$\tau = \frac{\gamma_2^2}{\lambda}$$

gewählt wird. Es ist dann

$$(11.) \qquad u = -2 \cdot \log \varrho - 2 \cdot \log \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} + \log \varrho \right) - \log \lambda.$$

Das Integral enthält nur eine willkürliche Konstante $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$, was auch zu erwarten war, da ja $C = 2$ gesetzt wurde. Aber es ist auch kein spezieller Fall der durch die Gleichung (9.) dargestellten Funktion u, sondern bildet einen Typus für sich.

Mit der Differentialgleichung (7.) hat sich schon *Poincaré**) in einer Abhandlung über die Theorie der *Fuchs*schen Funktionen beschäftigt. Er integriert die Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{du}{d\varrho} = 8 \cdot e^u$$

mittels der Methode der sukzessiven Annäherungen und findet zwei Typen für die Funktion u; zunächst ein Integral von der Form

$$u = + p \cdot \log \varrho + v,$$

wo v für $\varrho = 0$ endlich bleibt und die Konstante p nicht gleich -2 ist; andererseits ein Integral

$$u = -2 \cdot \log \varrho - 2 \cdot \log \log \varrho - \log 4.$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Formeln *Poincarés* mit den Ergebnissen dieses Kapitels im Einklange stehen.

Der zweite integrable Fall entspricht dem Werte Null der Konstanten $\varkappa$. Die Funktion u genügt dann der Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{d\varrho^2} = -2\lambda \cdot e^u.$$

Multipliziert man die Gleichung mit $2 \cdot \frac{du}{d\varrho}$, so sind beide Seiten integrierbar. Man findet

$$\frac{du}{\sqrt{C - e^u}} = 2 \cdot \sqrt{\lambda} \cdot d\varrho.$$

Hierin ist C eine willkürliche Integrationskonstante. Es sind mehrere Fälle zu unterscheiden, je nach dem Vorzeichen von C. Es sei zunächst C positiv und gleich c^2. Dann erhält man aus der letzten Gleichung durch Integration

$$\frac{1}{c} \cdot \log \frac{\sqrt{c^2 - e^u} - c}{\sqrt{c^2 - e^u} + c} = 2 \cdot \sqrt{\lambda} \cdot (\varrho - \varrho_0),$$

---

*) Journal de Mathématiques, V. Série, Tome 4, p. 147—148.

wo ϱ_0 eine willkürliche Konstante ist. Für e^u und $\frac{du}{d\varrho}$ findet man die Werte

$$e^u = -\frac{4c^2 \cdot e^{2c\cdot\sqrt{\lambda}\cdot(\varrho-\varrho_0)}}{\left|1-e^{2c\cdot\sqrt{\lambda}\cdot(\varrho-\varrho_0)}\right|^2},$$

$$\frac{du}{d\varrho} = 2\cdot c\cdot\sqrt{\lambda}\cdot\frac{1+e^{2c\cdot\sqrt{\lambda}\cdot(\varrho-\varrho_0)}}{1-e^{2c\cdot\sqrt{\lambda}\cdot(\varrho-\varrho_0)}}.$$

Die Differentialgleichung zwischen x und y hat für $\varkappa = 0$ die Gestalt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\lambda\cdot x - y}{x\cdot(y+2)}. \tag{12.}$$

Man erhält ihr allgemeines Integral, wenn man die Variable ϱ zwischen den beiden Gleichungen $x = \varrho^2\cdot e^u$, $y = \varrho\cdot\frac{du}{d\varrho}$ eliminiert. Das Ergebnis dieser Rechnung ist die Relation

$$\gamma\cdot\sqrt{x}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4\lambda\cdot x+y^2}} = \pm\left(y-\sqrt{4\lambda\cdot x+y^2}\right); \tag{13.}$$

γ ist eine willkürliche Konstante.

Wenn man das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d\zeta}{dy} = (y+3)\cdot\zeta^2 + y\cdot(y+2)\cdot\zeta^3 \tag{14.}$$

herstellen will, so muß man in der letzten Gleichung

$$2\lambda\cdot x = y + \frac{1}{\zeta}$$

setzen. Die Beziehung zwischen ζ und y ist also recht verwickelt; wollte man ζ als explizite Funktion von y berechnen, so würde man zu wenig übersichtlichen Reihenentwickelungen gelangen. —

Es muß noch untersucht werden, welche Form die Integrale annehmen, wenn die Konstante C negativ, gleich $-c^2$ ist. Man findet in diesem Falle durch Integration

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{c}\cdot\sqrt{-e^u-c^2}\right) = c\cdot\sqrt{\lambda}\cdot(\varrho-\varrho_0),$$

ferner für e^u und $\frac{du}{d\varrho}$

$$e^u = -\frac{c^2}{\cos^2[c\cdot\sqrt{\lambda}\cdot(\varrho-\varrho_0)]},$$

$$\frac{du}{d\varrho} = 2c\cdot\sqrt{\lambda}\cdot\operatorname{tg}[c\cdot\sqrt{\lambda}\cdot(\varrho-\varrho_0)].$$

Eliminiert man zwischen den Gleichungen $x = \varrho^2\cdot e^u$ und $y = \varrho\cdot\frac{du}{d\varrho}$ die Variable ϱ, so ergibt sich das Integral

(15.) $$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\left[\sqrt{-(4\lambda\cdot x+y^2)}-\gamma\right]=\frac{y}{\sqrt{-(4\lambda x+y^2)}}$$

der Differentialgleichung

(12.) $$\frac{dy}{dx}=-\frac{2\lambda\cdot x-y}{x\cdot(y+2)}.$$ —

Endlich kann die Konstante C verschwinden. In diesem Falle ist

$$e^u=-\frac{1}{\lambda\cdot(\varrho-\varrho_0)^2},\quad \frac{du}{d\varrho}=-\frac{2}{\varrho-\varrho_0}.$$

Die Differentialgleichung zwischen y und x besitzt das algebraische Integral

(16.) $$4\lambda\cdot x+y^2=0,$$

und die Gleichung $\frac{d\zeta}{dy}=(y+3)\cdot\zeta^2+y\cdot(y+2)\cdot\zeta^3$ wird durch die Funktion

$$\zeta=-\frac{2}{y\cdot(y+2)}$$

befriedigt.

IV. Integration durch unendliche Reihen, welche in der Umgebung einer festen singulären Stelle konvergieren.

Wenn man in die Differentialgleichung

(4.) $$\frac{d^2u}{d\varrho^2}+\frac{\varkappa}{\varrho}\cdot\frac{du}{d\varrho}=-2\lambda\cdot e^u,\quad \varkappa=\frac{2}{\alpha+1},$$

an Stelle von u und ϱ zwei neue Variable v und z mittels der Gleichungen

$$u=-2\log\varrho+\log\left(\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)+v,\quad \varrho^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}=z$$

einführt, gelangt man zu der Gleichung zweiter Ordnung

(17.) $$\frac{d^2v}{dz^2}=\nu\cdot\frac{1-e^v}{z^2},\quad \nu=\frac{2}{\varkappa-1}=2\cdot\frac{1+\alpha}{1-\alpha}.$$

Damit die angegebene Transformation möglich ist, muß man voraussetzen, daß die Konstante α weder gleich $+1$ noch gleich -1 ist.

Die Natur der Funktion v hängt von dem Werte der Konstanten ν ab. Wenn $\nu=-2$ ist, gelingt es, das Integral durch Quadraturen darzustellen. In allen anderen Fällen muß man sich mit konvergenten Reihenentwickelungen begnügen.

Die Werte von z, in deren Umgebung sich v nach positiven ganzen Potenzen entwickeln läßt, bieten kein Interesse. Für die Beurteilung der Natur der Funktion ist ausschließlich ihr Verhalten in der Nähe der singulären Stellen maßgebend. Diese letzteren lassen sich in zwei Gruppen einteilen: erstens in Singularitäten, die sich mit den Anfangswerten der

Lösungen verschieben, und zweitens in solche, die von den Anfangswerten unabhängig sind. In der Differentialgleichung (17.) sind die Stellen $z = 0$ und $z = \infty$ die *festen* singulären Punkte. Aus physikalischen Gründen beschränken sich die folgenden Betrachtungen auf den erstgenannten Wert. Es handelt sich demnach um die Aufgabe, Reihenentwickelungen für die Funktion v zu finden, die für hinreichend kleine Werte von z konvergieren.

Das Verfahren, welches hier zur Anwendung kommen soll, gründet sich auf gewisse Sätze, die *H. Poincaré* und Herr *Horn* über die Singularitäten von Differentialgleichungen erster Ordnung aufgestellt haben. Es werden im folgenden nur die Ergebnisse mitgeteilt werden, soweit sie für die Integration der Differentialgleichung (17.) in Betracht kommen. Was die genauere Begründung betrifft, insbesondere den Nachweis, daß die unendlichen Reihen auch konvergieren, so sei auf die genannten Arbeiten verwiesen.

Man kann zunächst die Gleichung (17.) durch das System

$$(18.)\qquad \begin{aligned} z \cdot \frac{dv}{dz} &= w, \\ z \cdot \frac{dw}{dz} &= w + \nu \cdot (1 - e^v) = w - \nu \cdot v + \cdots \end{aligned}$$

ersetzen. Auf die Funktionen v und w wendet man die linearen Substitutionen

$$(19.)\qquad \begin{aligned} \xi &= h_1 \cdot v + k_1 \cdot w, \\ \eta &= h_2 \cdot v + k_2 \cdot w \end{aligned}$$

an und bestimmt die Konstanten h und k aus den Gleichungen

$$(20.)\qquad \begin{aligned} h_1 + k_1 \cdot (1 - \beta_1) &= 0, \quad h_2 + k_2 \cdot (1 - \beta_2) = 0, \\ h_1 \cdot \beta_1 + k_1 \cdot \nu \quad &= 0, \quad h_2 \cdot \beta_2 + k_2 \cdot \nu \quad = 0, \end{aligned}$$

wo β_1 und β_2 Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(21.)\qquad \beta^2 - \beta + \nu = 0$$

sind. Alsdann nimmt das System (18.) die Gestalt

$$(22.)\qquad \begin{aligned} z \cdot \frac{d\xi}{dz} &= \beta_1 \cdot \xi + \varphi_1(\xi, \eta), \\ z \cdot \frac{d\eta}{dz} &= \beta_2 \cdot \eta + \varphi_2(\xi, \eta) \end{aligned}$$

an. Die Funktionen φ_1 und φ_2 sind Potenzreihen, in denen die Glieder von geringerer als der zweiten Dimension fehlen. Wenn die beiden Wurzeln β_1 und β_2 voneinander verschieden sind, ist die Form (22.) für das System der Differentialgleichungen erster Ordnung im allgemeinen die zweckmäßigste. Hat jedoch die quadratische Gleichung (21.) zwei zusammen-

fallende Wurzeln $\beta_0 = \frac{1}{2}$, oder was dasselbe ist, setzt man voraus, daß $\nu = \frac{1}{4}$ ist, so bestimmt man die Koeffizienten h und k in den Substitutionen (19.) so, daß die Gleichungen

$$(20^a.) \qquad \frac{h_1}{k_1} = -\frac{1}{2}, \qquad h_2 + \frac{1}{2}k_2 = k_1$$

erfüllt werden. Das System (18.) erhält dann die Form

$$(22^a.) \qquad \begin{aligned} z \cdot \frac{d\xi}{dz} &= \beta_0 \cdot \xi \qquad + \psi_1(\xi, \eta), \\ z \cdot \frac{d\eta}{dz} &= \beta_0 \cdot \eta + \xi + \psi_2(\xi, \eta), \end{aligned}$$

wo die Potenzreihen ψ_1 und ψ_2 Glieder erster Dimension nicht mehr enthalten.

Eine besondere Behandlung erfordert der Fall, daß der Quotient der Wurzeln β_1 und β_2 eine von Eins verschiedene positive ganze Zahl ist; davon wird weiter unten die Rede sein. —

Der Charakter der Integrale des Systems (18.) hängt in der Umgebung der Stelle $z = 0$ wesentlich von der Beschaffenheit der Wurzeln der quadratischen Gleichung (21.) ab. Es zeigt sich, daß es zweckmäßig ist, die folgenden Fälle zu unterscheiden:

Erstens: Die Wurzeln sind konjugiert komplexe Zahlen, deren reeller Teil den Wert $+\frac{1}{2}$ hat.

Zweitens: Die Wurzeln sind beide reell und positiv, und ihr Quotient ist nicht gleich einer positiven ganzen Zahl.

Drittens: Von den beiden Wurzeln ist die eine positiv, die andere negativ.

Viertens: Die Gleichung (21.) hat zwei zusammenfallende Wurzeln, deren Wert gleich $\frac{1}{2}$ ist.

Fünftens: Die Wurzeln sind reell und positiv; aber ihr Quotient ist gleich einer von Eins verschiedenen positiven ganzen Zahl. —

Der erste und zweite Fall lassen sich gemeinsam behandeln. Sind β_1 und β_2 konjugiert komplexe Zahlen, so liegt die Konstante α, welche in der Gleichung

$$(1^a.) \qquad \vartheta = a \cdot r^{-\alpha}$$

auftritt, zwischen den Grenzen $-\frac{7}{9}$ und $+1$. Die absolute Temperatur nimmt daher mit der Entfernung ab oder zu, je nachdem α positiv oder

negativ ist. Da $z = r^{\alpha-1}$ ist, entspricht der singuläre Punkt $z = 0$ unendlich großen Werten von r.

Wenn β_1 und β_2 reell und positiv sind, besteht die Ungleichung $-1 < \alpha < -\frac{7}{9}$. Die Temperatur ϑ nimmt mit der Entfernung zu. Die singuläre Stelle $z = 0$ entspricht wiederum unendlich großen Werten von r.

In beiden Fällen setzt man

$$\omega_1 = c_1 \cdot z^{\beta_1}, \quad \omega_2 = c_2 \cdot z^{\beta_2},$$

wo c_1 und c_2 willkürliche Konstanten sind. Betrachtet man ξ und η als Funktionen der Variabeln ω_1 und ω_2, so erhält das System (22.) die Form

$$(23.) \qquad \begin{aligned} \beta_1 \cdot \omega_1 \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \omega_1} + \beta_2 \cdot \omega_2 \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \omega_2} &= \beta_1 \cdot \xi + \varphi_1(\xi, \eta), \\ \beta_1 \cdot \omega_1 \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \omega_1} + \beta_2 \cdot \omega_2 \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \omega_2} &= \beta_2 \cdot \eta + \varphi_2(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Für ξ und η findet man gewöhnliche Potenzreihen der beiden Argumente ω_1 und ω_2, welche konvergieren, wenn die absoluten Beträge von ω_1 und ω_2 hinreichend klein sind:

$$\xi = \sum_{i=0}^{i=\infty} \sum_{k=0}^{k=\infty} a_{ik} \cdot \omega_1^i \cdot \omega_2^k, \qquad (i+k \geq 1)$$

$$\eta = \sum_{i=0}^{i=\infty} \sum_{k=0}^{k=\infty} b_{ik} \cdot \omega_1^i \cdot \omega_2^k.$$

Ferner ergibt sich für v eine Reihenentwickelung von derselben Form:

$$v = \sum_{i=0}^{i=\infty} \sum_{k=0}^{k=\infty} c_{ik} \cdot z^{i \cdot \beta_1 + k \cdot \beta_2}. \qquad (i+k \geq 1)$$

In den Koeffizienten c_{ik} treten zwei willkürliche Konstanten c_1 und c_2 auf; die Funktion v ist daher das allgemeine Integral der Differentialgleichung (17.).

Es ist von Interesse, unter der Voraussetzung, daß die Wurzeln β_1 und β_2 konjugiert komplexe Zahlen sind, einen Näherungswert für v abzuleiten, aus dem sich Schlüsse ziehen lassen über die Verteilung des Gases in großen Entfernungen vom Zentrum der Kugel. Ist nämlich z hinreichend klein, so kann man sich auf den Ausdruck

$$v_0 = c_{10} \cdot z^{\beta_1} + c_{01} \cdot z^{\beta_2}$$

beschränken, wo jetzt

$$\beta_1 = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} \cdot \sqrt{-1},$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2} - \frac{\tau}{2} \cdot \sqrt{-1}, \quad \tau = \sqrt{\frac{7 + 9\alpha}{1 - \alpha}}$$

zu setzen ist. An Stelle der beiden willkürlichen Konstanten c_{10} und c_{01} führt man zwei andere a und b mittels der Gleichungen

$$c_{10} = a + b \cdot \sqrt{-1}, \quad c_{01} = a - b \cdot \sqrt{-1}$$

ein und erhält

$$v_0 = 2 \cdot \sqrt{z} \cdot \left\{ a \cdot \cos\left(\frac{\tau}{2} \cdot \log z\right) + b \cdot \sin\left(\frac{\tau}{2} \cdot \log z\right) \right\}.$$

Für den Druck p ergibt sich dann als Funktion der Entfernung r der Näherungswert

$$p_0 = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \cdot \frac{1}{r^{2\alpha+2}} \cdot e^{v_0},$$

wo

$$v_0 = 2r^{\frac{\alpha-1}{2}} \cdot \left\{ a \cdot \cos\left(\frac{\tau \cdot (\alpha-1)}{2} \cdot \log r\right) + b \cdot \sin\left(\frac{\tau \cdot (\alpha-1)}{2} \log r\right) \right\}$$

ist. Die Gleichungen lehren, daß die Gasmasse sich ins Unendliche erstreckt. Für $r = \infty$ verschwindet der Druck wie die Potenz $r^{-2\alpha-2}$. Den besonderen Fall, daß das Gas überall dieselbe Temperatur besitzt, d. h. $\alpha = 0$, hat schon der Astrophysiker *Zöllner**) untersucht; doch ist ihm die Integration der Differentialgleichungen nicht gelungen.

Im dritten Falle sind die Wurzeln β_1 und β_2 voneinander verschieden und reell, aber nur β_1 ist positiv, β_2 dagegen negativ. Die Konstante α kann positiv oder negativ sein, ihr absoluter Betrag ist jedoch größer als Eins.

Wenn die Ungleichung $\alpha < -1$ besteht, nimmt die Temperatur mit der Entfernung zu. Die singuläre Stelle $z = 0$ entspricht unendlich großen Werten von r.

Ist aber $\alpha > +1$, so nehmen die Temperaturen mit dem Abstande vom Mittelpunkte der Gaskugel ab. Die Variabeln z und r verschwinden gleichzeitig, und die weiter unten aufgestellten Reihen konvergieren in der Nähe des Zentrums der Kugel.

Es sei nun

$$\omega = c \cdot z^{\beta_1},$$

wo c eine willkürliche Konstante und β_1 positiv ist. Betrachtet man z als Funktion von ω, so erhält das System (22.) die Form

---

*) *J. C. F. Zöllner.* Über die Natur der Kometen. Leipzig 1872. S. 301 ff.

$$\beta_1 \cdot \omega \cdot \frac{d\xi}{d\omega} = \beta_1 \cdot \xi + \varphi_1(\xi, \eta),$$

(24.)

$$\beta_1 \cdot \omega \cdot \frac{d\eta}{d\omega} = \beta_2 \cdot \eta + \varphi_2(\xi, \eta).$$

Für ξ und η ergeben sich Reihen, die nach positiven ganzen Potenzen von ω fortschreiten, und zwar verschwindet ξ für $\omega = 0$ von der ersten Ordnung, η dagegen von der zweiten Ordnung.

$$\xi = \sum_{k=1}^{k=\infty} a_k \cdot \omega^k, \quad \eta = \sum_{k=2}^{k=\infty} b_k \cdot \omega^k.$$

Die Funktion v wird durch eine konvergente Reihe von der Form

$$v = \sum_{k=1}^{k=\infty} c_k \cdot z^{k \cdot \beta_1}$$

dargestellt. Da in den Koeffizienten nur die eine willkürliche Konstante c auftritt, ist der Ausdruck für v ein partikuläres Integral der Differentialgleichung (17.).

Im vierten Falle hat die quadratische Gleichung (21.) zwei gleiche Wurzeln $\beta_0 = +\frac{1}{2}$. Die Konstante α ist gleich $-\frac{7}{9}$. Die absolute Temperatur wächst mit dem Abstande vom Mittelpunkte der Kugel. Der singulären Stelle $z = 0$ entsprechen unendlich große Werte von r.

Man setzt

$$\omega_1 = c \cdot z^{\beta_0}, \quad \omega_2 = -c \cdot \beta_0 \cdot z^{\beta_0} \cdot \log z + c' \cdot z^{\beta_0},$$

wo c und c' willkürliche Konstanten sind. Nimmt man an, daß ξ und η Funktionen der Argumente ω_1 und ω_2 sind, so erhält das System (22ª.) die Form

$$\omega_1 \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \omega_1} + (\omega_2 - \omega_1) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \omega_2} = \xi \qquad + 2\psi_1(\xi, \eta),$$

(25.)

$$\omega_1 \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \omega_1} + (\omega_2 - \omega_1) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \omega_2} = \eta + 2\xi + 2\psi_2(\xi, \eta).$$

Diese Differentialgleichungen werden durch die Potenzreihen

$$\xi = \sum_{i=0}^{i=\infty} \sum_{k=0}^{k=\infty} a_{ik} \cdot \omega_1^i \cdot \omega_2^k,$$

$$\eta = \sum_{i=0}^{i=\infty} \sum_{k=0}^{k=\infty} b_{ik} \cdot \omega_1^i \cdot \omega_2^k$$

befriedigt. Für die ersten Koeffizienten kann man die Werte

$$a_{10} = 1, \quad a_{01} = 0, \quad b_{10} = 1, \quad b_{01} = -2$$

wählen; die übrigen lassen sich dann als Funktionen dieser Größen berechnen. Die Funktion v hat dieselbe Form wie ξ und η. Sie ist das

allgemeine Integral der Differentialgleichung (17.), weil sie zwei willkürliche Konstanten c und c' enthält. Man erhält ein partikuläres, logarithmenfreies Integral, wenn man $c = 0$ setzt.

Im fünften Falle ist der Quotient der beiden Wurzeln β_1 und β_2 eine positive, von Eins verschiedene ganze Zahl. Es läßt sich beweisen, daß man das System der Differentialgleichungen (18.) durch eine Reihe von Transformationen auf diejenige Form zurückführen kann, welche unter Nr. 4 behandelt worden ist.

Es sei $\beta_2 = m \cdot \beta_1$, $m > 1$. Eine einfache Rechnung ergibt

$$\beta_1 = \frac{1}{m+1}, \quad \beta_2 = \frac{m}{m+1}, \quad \alpha = -\frac{2m^2+3m+2}{2m^2+5m+2}, \quad \nu = \frac{m}{(m+1)^2}.$$

Die Temperatur ϑ nimmt mit der Entfernung zu; der singuläre Punkt $z = 0$ entspricht unendlich großen Werten von r.

Wendet man auf die Funktionen v und w sowie auf die Variable z die Substitutionen

$$\begin{aligned} \xi &= -m \cdot v + (m+1) \cdot w, \\ \eta &= +m \cdot v + (m+1) \cdot w, \\ \zeta &= z^{\beta_1} \end{aligned}$$

an, so nimmt das System (18.) die Gestalt

$$(26.) \qquad \begin{aligned} \zeta \cdot \frac{d\xi}{d\zeta} &= \xi + \chi_1(\xi, \eta), \\ \zeta \cdot \frac{d\eta}{d\zeta} &= m \cdot \eta + (m+1) \cdot \xi + \chi_2(\xi, \eta) \end{aligned}$$

an, wo die Potenzreihen χ_1 und χ_2 Glieder erster Dimension nicht mehr enthalten. Durch die Transformation

$$\eta = \xi \cdot \left(\eta_1 - \frac{m+1}{m-1}\right)$$

erhält man aus (26.)

$$(26^a.) \qquad \begin{aligned} \zeta \cdot \frac{d\xi}{d\zeta} &= \xi + \bar{\chi}_1(\xi, \eta_1), \\ \zeta \cdot \frac{d\eta_1}{d\zeta} &= (m-1) \cdot \eta_1 + \mu_1 \cdot \xi + \bar{\chi}_2(\xi, \eta_1), \end{aligned}$$

wo μ_1, abgesehen von m, noch von den konstanten Koeffizienten der Glieder zweiten Grades in χ_1 und χ_2 abhängt. Das System (26^a.) hat dieselbe Form wie (26.); nur ist der Faktor von η_1 um eine Einheit kleiner. Daraus folgt: wenn man die letzte Transformation wiederholt anwendet, gelangt man schließlich zu einem System, in welchem der Koeffizient von

η_{m-1} gleich 1 ist, d. h. man erhält Differentialgleichungen, die mit Hilfe der unter Nr. 4 angegebenen Methode integriert werden können. Die Funktion v schreitet also nach Potenzen von $\log z$ fort, und die Koeffizienten der Entwicklung sind Reihen, die für $z = 0$ verschwinden.

V. Differentialgleichungen für das konvektive Gleichgewicht der Erdatmosphäre.

In seinen Vorlesungen über die Theorie der Wärme hat *Helmholtz**) die Prinzipien der mechanischen Wärmetheorie auf die atmosphärischen Verhältnisse angewandt und u. a. die Temperatur- und Druckverteilung für den Fall untersucht, daß sich die Lufthülle im Zustande konvektiven Gleichgewichts befindet. Letzteres ist dadurch charakterisiert, daß sich ein auf- oder absteigendes Luftquantum adiabatisch abkühlt bezw. erwärmt, d. h. also, daß es in der veränderten Höhe Luftschichten von derjenigen Temperatur vorfindet, die es selbst annimmt. Eins der Ergebnisse, zu denen *Helmholtz* gelangt, ist die bemerkenswerte Tatsache, daß die Atmosphäre unter den angegebenen Voraussetzungen eine Grenze haben würde, die man in einer Höhe von etwa 27 500 Metern zu suchen hätte. Die *Helmholtz*schen Formeln zeigen nämlich, daß mit wachsender Entfernung von der Erdoberfläche sowohl der Druck als auch die absolute Temperatur beständig abnehmen und in der genannten Höhe beide verschwinden. Eine genauere Betrachtung dieser Gleichungen lehrt nun aber, daß es sich nur um Näherungsformeln handelt. Infolgedessen ergibt sich die Notwendigkeit, die exakten Differentialgleichungen aufzustellen und zu diskutieren.

Bezeichnet man mit p den Druck und mit ε die Dichtigkeit der Luft in der Entfernung r vom Mittelpunkte der Erde, so ist die hydrostatische Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{dp}{dr} = \varepsilon \cdot X,$$

wo X die Gesamtsumme der Kräfte bedeutet, die auf das Luftteilchen einwirken. Diese letzteren setzen sich aus zwei Teilen zusammen: erstens aus der Anziehung der Erde

$$-\frac{f \cdot M}{r^2},$$

wenn man mit M ihre Masse und mit f die Attraktionskonstante bezeichnet;

*) a. a. O., S. 197—201.

zweitens aus der Anziehung einer mit Luft erfüllten Kugelschale, deren äußerer Radius gleich r und deren innerer Radius gleich dem Erdhalbmesser R ist. Man findet für den zweiten Teil der Attraktion den Wert

$$-\frac{4\pi \cdot f}{r^2} \cdot \int_R^r \varepsilon \cdot r^2 \cdot dr.$$

Demnach nimmt die Gleichgewichtsbedingung folgende Form an:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{f \cdot \varepsilon}{r^2} \cdot \left\{ M + 4\pi \cdot \int_R^r \varepsilon \cdot r^2 \cdot dr \right\}. \tag{27.}$$

Unter der Voraussetzung adiabatischer Zustandsänderungen bestehen zwischen dem Drucke p, der Dichtigkeit ε und der absoluten Temperatur ϑ die Gleichungen

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{\varkappa}, \quad \frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{\varkappa - 1}.$$

$\varkappa$ ist das Verhältnis der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und konstantem Volumen, während p_0, ε_0, ϑ_0 diejenigen Werte sind, die die Funktionen $p, \varepsilon, \vartheta$ an der Erdoberfläche annehmen. Man führt zur Abkürzung zwei neue Konstanten ein:

$$a^2 = \frac{p_0}{\varepsilon_0^{\varkappa}}, \quad b^2 = \frac{\vartheta_0}{\varepsilon_0^{\varkappa - 1}}$$

und erhält die Gleichungen

$$p = a^2 \cdot \varepsilon^{\varkappa}, \quad \vartheta = b^2 \cdot \varepsilon^{\varkappa - 1}.$$

In der Nähe der Erdoberfläche verschwindet die Attraktion der gasförmigen Kugelschale gegen die Anziehung der Erde; man kann daher näherungsweise

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{f \cdot M \cdot \varepsilon}{r^2} \tag{28.}$$

setzen. Differenziert man die Gleichung $p = a^2 \cdot \varepsilon^{\varkappa}$ nach r, so ergibt sich

$$\frac{dp}{dr} = a^2 \cdot \varkappa \cdot \varepsilon^{\varkappa - 1} \cdot \frac{d\varepsilon}{dr},$$

und wenn man die beiden Werte von $\frac{dp}{dr}$ einander gleichsetzt,

$$a^2 \cdot \varkappa \cdot \varepsilon^{\varkappa - 2} \cdot \frac{d\varepsilon}{dr} = -\frac{f \cdot M}{r^2}.$$

Man differenziert ferner die Gleichung $\vartheta = b^2 \cdot \varepsilon^{\varkappa - 1}$ nach r,

$$\frac{d\vartheta}{dr} = b^2 \cdot (\varkappa - 1) \cdot \varepsilon^{\varkappa - 2} \cdot \frac{d\varepsilon}{dr},$$

und eliminiert zwischen den beiden letzten Gleichungen $\varepsilon^{\varkappa - 2} \cdot \frac{d\varepsilon}{dr}$. Das Ergebnis ist eine Differentialgleichung von der Form

(29.) $$\frac{d\vartheta}{dr} = -\frac{\lambda^2}{r^2};$$

die Konstante auf der rechten Seite hat den Wert

$$\lambda^2 = \frac{f \cdot M \cdot b^2 \cdot (\varkappa - 1)}{a^2 \cdot \varkappa}.$$

Durch Integration erhält man die Temperatur ϑ als Funktion des Abstandes r vom Mittelpunkte der Erde:

$$\vartheta - \vartheta_0 = -\lambda^2 \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right).$$

Diese Gleichung läßt sich weiter vereinfachen, wenn man bedenkt, daß r nur wenig größer ist als R. Setzt man also $r = R + h$, wo h die Höhe des Luftteilchens über der Erdoberfläche ist, so kann man in der Nähe der letzteren alle Glieder vernachlässigen, welche die zweiten oder höheren Potenzen von $\frac{h}{R}$ als Faktor enthalten, und man findet

(30.) $$\vartheta_0 - \vartheta = \frac{\lambda^2 \cdot h}{R^2},$$

d. h. die Temperaturabnahme ist der Höhe proportional. Für die Grenze der Atmosphäre verschwinden gleichzeitig Druck und Temperatur, und man erhält die Höhe der Lufthülle aus der Gleichung $h = \frac{R^2 \cdot \vartheta_0}{\lambda^2}$. Die numerische Rechnung liefert denselben Wert, den *Helmholtz* angibt. Die Ableitung, die man in seinen Vorlesungen findet, ist nur in der Form von der hier wiedergegebenen verschieden. Bei genauerer Untersuchnng zeigt es sich, daß er sich in den Formeln Vereinfachungen erlaubt hat, die mit den Vernachlässigungen dieses Kapitels identisch sind. Infolgedessen ist das Ergebnis, daß nämlich die Atmosphäre im Falle konvektiven Gleichgewichtes eine obere Grenze besitzt, nicht ganz frei von Bedenken. —

Die exakten Differentialgleichungen lassen sich folgendermaßen ableiten: Wenn man in die Gleichung

(27.) $$\frac{dp}{dr} = -\frac{f \cdot \varepsilon}{r^2} \cdot \left\{M + 4\pi \cdot \int_R^r \varepsilon \cdot r^2 \cdot dr\right\}$$

an Stelle von $\frac{dp}{dr}$ den Ausdruck $a^2 \cdot \varkappa \cdot \varepsilon^{\varkappa-1} \cdot \frac{d\varepsilon}{dr}$ einführt, erhält man

$$a^2 \cdot \varkappa \cdot \varepsilon^{\varkappa-2} \cdot \frac{d\varepsilon}{dr} = -\frac{f}{r^2} \cdot \left\{M + 4\pi \cdot \int_R^r \varepsilon \cdot r^2 \cdot dr\right\}.$$

Andererseits ist $\frac{d\vartheta}{dr} = b^2 \cdot (\varkappa - 1) \cdot \varepsilon^{\varkappa-2} \cdot \frac{d\varepsilon}{dr}$. Man eliminiert zwischen den

beiden letzten Gleichungen $\varepsilon^{\varkappa-2} \cdot \frac{d\varepsilon}{dr}$. Es ergibt sich

$$\frac{d\vartheta}{dr} = -\frac{\lambda^2}{r^2} - \frac{\mu^2}{r^2} \cdot \int_R^r \vartheta^{\frac{1}{\varkappa-1}} \cdot r^2 \cdot dr,$$

wo der Wert von λ^2 schon oben angegeben wurde, während

$$\mu^2 = \frac{4\pi \cdot f \cdot (\varkappa - 1) \cdot b^{\frac{2(\varkappa-2)}{\varkappa-1}}}{a^2 \cdot \varkappa}$$

ist. Es ist zweckmäßig, an Stelle der Veränderlichen r eine Variable ϱ zu setzen, die durch die Gleichung $\varrho \cdot r = R$ definiert wird. Dann erhält man

$$\frac{d\vartheta}{d\varrho} = \frac{\lambda^2}{R} + \mu^2 \cdot R^2 \cdot \int_\varrho^1 \vartheta^{\frac{1}{\varkappa-1}} \cdot \frac{d\varrho}{\varrho^4}. \tag{31.}$$

Differenziert man noch einmal nach ϱ, so entsteht eine Gleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2\vartheta}{d\varrho^2} = -\frac{\mu^2 \cdot R^2}{\varrho^4} \cdot \vartheta^\nu, \quad \nu = \frac{1}{\varkappa - 1}. \tag{32.}$$

Ein partikuläres Integral ist

$$\vartheta = \left\{ -\frac{2(3-\nu)}{\mu^2 \cdot R^2 \cdot (\nu-1)^2} \right\}^{\frac{1}{\nu-1}} \cdot \varrho^{\frac{2}{\nu-1}}.$$

Als Zahlenwert für das Verhältnis der beiden spezifischen Wärmen soll im folgenden $\varkappa = 1{,}4$ angenommen werden; infolgedessen ist die Konstante $\nu = \frac{5}{2}$.

VI. Diskussion der Differentialgleichung. Die Grenze der Atmosphäre.

Die absolute Temperatur ϑ, welche, wie oben bewiesen wurde, der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\vartheta}{d\varrho^2} = -\frac{\mu^2 \cdot R^2}{\varrho^4} \cdot \vartheta^\nu \tag{32.}$$

genügt, soll im Intervalle von $\varrho = 1$ bis $\varrho = 0$ oder, was dasselbe ist, von $r = R$ bis $r = \infty$ genauer untersucht werden, aber nur für solche Werte der unabhängigen Variabeln, für die ϑ selbst reell und positiv bleibt. Andere Annahmen würden keine physikalische Bedeutung haben. Die Potenz $\vartheta^\nu = \vartheta^{\frac{5}{2}}$ ist keine eindeutige Funktion; indessen muß man berücksichtigen, daß ϑ^ν, abgesehen von einem positiven Faktor, gleich der Dichtigkeit ε des Luftteilchens ist. Man kann sich daher auf den positiven Zweig der Funktion beschränken.

Die Differentialgleichung zweiter Ordnung besitzt zwei feste singuläre Stellen, $\varrho = 0$ und $\varrho = \infty$. Aber es ist möglich, daß außerdem noch bewegliche Singularitäten auftreten, die von der Wahl der Anfangsbedingungen abhängig sind. Stellt man sich also die Aufgabe, die absolute Temperatur in der Umgebung einer von $\varrho = 0$ und $\varrho = \infty$ verschiedenen Stelle in Reihen zu entwickeln, so ist es sehr wohl denkbar, daß diese Entwickelungen auch andere als positive ganze Potenzen enthalten.

Der Hauptzweck der Untersuchungen dieses Kapitels ist folgender: es soll festgestellt werden, ob es möglich ist, für die Atmosphäre eine obere Grenze in endlicher Entfernung von der Erdoberfläche anzunehmen. Diese Oberfläche wird dadurch charakterisiert, daß daselbst sowohl der Druck als auch die Temperatur den Wert Null erhalten. Gibt es nun Integrale der Differentialgleichung (32.), welche für Werte von ϱ verschwinden, die zwischen 0 und 1 liegen?

Aus der Gleichung

$$(31.) \qquad \frac{d\vartheta}{d\varrho} = \frac{\lambda^2}{R} + \mu^2 \cdot R^2 \cdot \int_{\varrho}^{1} \vartheta^\nu \cdot \frac{d\varrho}{\varrho^4}$$

geht hervor, daß für $\varrho = 1$, also an der Erdoberfläche, $\frac{d\vartheta}{d\varrho} = \frac{\lambda^2}{R}$ positiv ist. Nimmt demnach ϱ ab oder r zu, so wird ϑ zunächst kleiner. Man überzeugt sich leicht, daß diese Abnahme der Temperatur mit wachsender Entfernung auch noch weiter andauert, solange wenigstens die Funktion ϑ positiv und von Null verschieden bleibt. Ob freilich der Wert $\vartheta = 0$ erreicht wird, ist eine Frage, die einer besonderen Untersuchung bedarf.

In der Tat läßt sich zeigen, daß es Integrale der Differentialgleichung (32.) gibt, die für eine vorgeschriebene, von den festen singulären Werten verschiedene Stelle ϱ_0 verschwinden. Zu diesem Zwecke stellt man eine Reihe von Funktionen $\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \ldots$ her, die den Differentialgleichungen

$$(33.) \qquad \frac{d^2\vartheta_0}{d\varrho^2} = -\frac{\mu^2 \cdot R^2}{\varrho_0^4} \cdot \vartheta_0^\nu, \quad \frac{d^2\vartheta_n}{d\varrho^2} = -\frac{\mu^2 \cdot R^2}{\varrho^4} \cdot \vartheta_{n-1}^\nu, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

genügen, und die alle für $\varrho = \varrho_0$ verschwinden*). Man bildet dann die konvergente Reihe

$$\vartheta = \vartheta_0 + (\vartheta_1 - \vartheta_0) + (\vartheta_2 - \vartheta_1) + \cdots$$

*) Die Funktion ϑ_0 hat hier eine andere Bedeutung als im vorigen Kapitel.

und beweist, daß ihre Summe ein Integral der gegebenen Differentialgleichung ist.

Wenn man in der Gleichung für ϑ_0 beide Seiten mit $2 \cdot \frac{d\vartheta_0}{d\varrho}$ multipliziert und alsdann integriert, erhält man

$$\left(\frac{d\vartheta_0}{d\varrho}\right)^2 = \omega - \tau \cdot \vartheta_0^{\nu+1},$$

wo ω eine willkürliche Konstante und $\tau = \frac{2 \cdot \mu^2 \cdot R^2}{(\nu+1) \cdot \varrho_0^4}$ ist. Die Variable ϱ kann man als Funktion von ϑ_0 durch Quadraturen bestimmen,

$$\varrho - \varrho_0 = \int_0^{\vartheta_0} \frac{d\vartheta_0}{\sqrt{\omega - \tau \cdot \vartheta_0^{\nu+1}}}.$$

Entwickelt man nun die rechte Seite nach Potenzen von ϑ_0, so entsteht eine Reihe, die in der Umgebung von $\vartheta_0 = 0$ konvergiert,

$$\varrho - \varrho_0 = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \cdot \left\{\vartheta_0 - \binom{-\frac{1}{2}}{1} \cdot \frac{\tau}{\omega} \cdot \frac{\vartheta_0^{\nu+2}}{\nu+2} + \binom{-\frac{1}{2}}{2} \cdot \frac{\tau^2}{\omega^2} \cdot \frac{\vartheta_0^{2\nu+3}}{2\nu+3} - \cdots\right\},$$

und umgekehrt findet man für ϑ_0 eine konvergente Reihe von der Form

$$\vartheta_0 = \sqrt{\omega} \cdot (\varrho - \varrho_0) + \lambda_1 \cdot (\varrho - \varrho_0)^{\nu+2} + \lambda_2 \cdot (\varrho - \varrho_0)^{2\nu+3} + \lambda_3 \cdot (\varrho - \varrho_0)^{3\nu+4} + \cdots.$$

Wenn man die Funktion ϑ_1 als Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\vartheta_1}{d\varrho^2} = -\frac{\mu^2 \cdot R^2}{\varrho^4} \cdot \vartheta_0^{\nu}$$

bestimmen will, muß man die rechte Seite nach Potenzen von $(\varrho - \varrho_0)$ entwickeln und darauf zweimal integrieren, indem man berücksichtigt, daß für $\varrho = \varrho_0$ die Funktion ϑ_1 gleich Null, ihre erste Ableitung dagegen gleich $\sqrt{\omega}$ ist. Das Ergebnis ist eine Potenzreihe

$$\begin{aligned}\vartheta_1 = \sqrt{\omega} \cdot (\varrho - \varrho_0) &+ \delta_{11} \cdot (\varrho - \varrho_0)^{\nu+2} + \delta_{12} \cdot (\varrho - \varrho_0)^{2\nu+3} + \delta_{13} \cdot (\varrho - \varrho_0)^{3\nu+4} + \cdots \\ &+ \delta_{21} \cdot (\varrho - \varrho_0)^{\nu+3} + \delta_{22} \cdot (\varrho - \varrho_0)^{2\nu+4} + \delta_{23} \cdot (\varrho - \varrho_0)^{3\nu+5} + \cdots \\ &+ \delta_{31} \cdot (\varrho - \varrho_0)^{\nu+4} + \delta_{32} \cdot (\varrho - \varrho_0)^{2\nu+5} + \delta_{33} \cdot (\varrho - \varrho_0)^{3\nu+6} + \cdots \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\end{aligned}$$

von der sich leicht beweisen läßt, daß sie konvergiert, wenn nur $(\varrho - \varrho_0)$ hinreichend klein gewählt wird. Die Reihen für $\vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4, \ldots$ haben genau dieselbe Form und unterscheiden sich nur durch die Werte der konstanten Koeffizienten. —

Nachdem die Form der Entwickelungen festgestellt worden ist, handelt es sich darum zu zeigen, daß die Reihe der Funktionen ϑ_n gegen eine bestimmte Grenze ϑ konvergiert, wenn $n = \infty$ wird.

Es werde vorausgesetzt, daß die Variable ϱ in der Umgebung der Stelle ϱ_0 nur solche Werte annimmt, für welche die Potenzreihe ϑ_0 konvergiert und dem absoluten Betrage nach kleiner als eine positive Zahl b ist. Bezeichnet man also mit a eine positive Größe*), so sei

$$\varrho_0 - a < \varrho < \varrho_0 + a.$$

Es sei ferner Q der größte Wert der Funktion $\frac{\vartheta_0^\nu}{\varrho^4}$, wenn ϱ dem genannten Intervalle angehört. Aus der Gleichung

$$\vartheta_1 = \sqrt{\omega} \cdot (\varrho - \varrho_0) - \mu^2 \cdot R^2 \cdot \int_{\varrho_0}^{\varrho} \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{\vartheta_0^\nu}{\varrho^4} \cdot d\varrho^2$$

folgt dann für den absoluten Betrag der Funktion ϑ_1

$$\text{abs}\,\vartheta_1 < \text{abs}\,\{\sqrt{\omega} \cdot (\varrho - \varrho_0)\} + \tfrac{1}{2} \cdot \mu^2 \cdot R^2 \cdot Q \cdot (\varrho - \varrho_0)^2.$$

Ist nun σ eine positive Konstante, die höchstens gleich a ist und die der Ungleichung

$$\sqrt{\omega} \cdot \sigma + \tfrac{1}{2} \cdot \mu^2 \cdot R^2 \cdot Q \cdot \sigma^2 < b$$

genügt, und beschränkt man die Variable ϱ auf das Intervall von $\varrho_0 - \sigma$ bis $\varrho_0 + \sigma$, so wird auch der absolute Betrag von ϑ_1 kleiner als b. Man bildet das Integral

$$\vartheta_2 = \sqrt{\omega} \cdot (\varrho - \varrho_0) - \mu^2 \cdot R^2 \cdot \int_{\varrho_0}^{\varrho} \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{\vartheta_1^\nu}{\varrho^4} \cdot d\varrho^2$$

und überzeugt sich leicht, daß unter den angegebenen Voraussetzungen der absolute Betrag von ϑ_2 gleichfalls kleiner als b ist. Dasselbe gilt von den Funktionen $\vartheta_3, \vartheta_4, \vartheta_5, \ldots$.

Der absolute Betrag von $\vartheta_1 - \vartheta_0$ bleibt unterhalb einer endlichen, positiven Grenze, die mit B bezeichnet werden soll. Man bildet die Differenzen

$$(34.) \qquad \vartheta_n - \vartheta_{n-1} = -\mu^2 \cdot R^2 \cdot \int_{\varrho_0}^{\varrho} \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{1}{\varrho^4} \cdot (\vartheta_{n-1}^\nu - \vartheta_{n-2}^\nu) \cdot d\varrho^2$$

für $n = 2, 3, 4, \ldots$. Wenn man berücksichtigt, daß $\nu = \frac{5}{2}$ ist, wird $\vartheta_{n-1}^\nu - \vartheta_{n-2}^\nu = (\vartheta_{n-1} - \vartheta_{n-2}) \cdot \psi(\vartheta_{n-2}, \vartheta_{n-1})$, wo zur Abkürzung

$$\psi(\vartheta_{n-2}, \vartheta_{n-1}) = \frac{\vartheta_{n-2}^{\frac{4}{2}} + \vartheta_{n-2}^{\frac{3}{2}} \cdot \vartheta_{n-1}^{\frac{1}{2}} + \vartheta_{n-2}^{\frac{2}{2}} \cdot \vartheta_{n-1}^{\frac{2}{2}} + \vartheta_{n-2}^{\frac{1}{2}} \cdot \vartheta_{n-1}^{\frac{3}{2}} + \vartheta_{n-1}^{\frac{4}{2}}}{\vartheta_{n-2}^{\frac{1}{2}} + \vartheta_{n-1}^{\frac{1}{2}}}$$

gesetzt wurde. Die Quadratwurzeln, die in diesem Ausdrucke auftreten,

*) Das Intervall von $\varrho_0 - a$ bis $\varrho_0 + a$ darf nicht die singuläre Stelle $\varrho = 0$ enthalten.

haben das positive Zeichen. Die Funktionen ϑ_{n-2} und ϑ_{n-1} verschwinden für $\varrho = \varrho_0$ wie $\sqrt{\omega} \cdot (\varrho - \varrho_0)$, also von der ersten Ordnung. Infolgedessen ist $\varrho = \varrho_0$ für den Zähler von $\psi(\vartheta_{n-2}, \vartheta_{n-1})$ eine Nullstelle von der Ordnung 2, für den Nenner eine Nullstelle von der Ordnung $\frac{1}{2}$. Es läßt sich daher $\psi(\vartheta_{n-2}, \vartheta_{n-1})$ in eine Reihe entwickeln, die nach Potenzen von $\varrho - \varrho_0$ fortschreitet und für $\varrho = \varrho_0$ von der Ordnung $\frac{3}{2}$ verschwindet. Beschränkt man also ϱ auf das Intervall von $\varrho_0 - \sigma$ bis $\varrho_0 + \sigma$, so gibt es jedenfalls eine endliche, positive Zahl N, die größer ist als der absolute Betrag von $\frac{1}{\varrho^4} \cdot \psi(\vartheta_{n-2}, \vartheta_{n-1})$. Daraus folgt

$$\frac{1}{\varrho^4} \cdot \operatorname{abs}(\vartheta_{n-1}^{\nu} - \vartheta_{n-2}^{\nu}) < N \cdot \operatorname{abs}(\vartheta_{n-1} - \vartheta_{n-2}).$$

Unter Benutzung dieser Ungleichung erhält man aus (34.)

$$\operatorname{abs}(\vartheta_2 - \vartheta_1) < \tfrac{1}{2} \cdot \mu^2 \cdot R^2 \cdot N \cdot \sigma^2 \cdot B,$$
$$\operatorname{abs}(\vartheta_3 - \vartheta_2) < \tfrac{1}{4} \cdot \mu^4 \cdot R^4 \cdot N^2 \cdot \sigma^4 \cdot B,$$

und allgemein

$$\operatorname{abs}(\vartheta_n - \vartheta_{n-1}) < (\tfrac{1}{2} \cdot \mu^2 \cdot R^2 \cdot N \cdot \sigma^2)^{n-1} \cdot B.$$

Setzt man demnach

$$\vartheta_n = \vartheta_0 + (\vartheta_1 - \vartheta_0) + (\vartheta_2 - \vartheta_1) + \cdots + (\vartheta_n - \vartheta_{n-1}),$$

so sieht man, daß diese Summe mit wachsendem n gegen eine bestimmte Grenze konvergiert, wenn nur

$$\tfrac{1}{2} \cdot \mu^2 \cdot R^2 \cdot N \cdot \sigma^2 < 1$$

ist. Die unendliche Reihe

$$\vartheta = \vartheta_0 + (\vartheta_1 - \vartheta_0) + (\vartheta_2 - \vartheta_1) + \cdots + (\vartheta_n - \vartheta_{n-1}) + \cdots$$

ist daher konvergent, wenn der absolute Betrag von $\varrho - \varrho_0$ kleiner als δ ist, wo δ die kleinste der Zahlen σ bezeichnet, die den drei Ungleichungen

$$\sigma < a, \quad \sqrt{\omega} \cdot \sigma + \tfrac{1}{2} \cdot \mu^2 \cdot R^2 \cdot Q \cdot \sigma^2 < b, \quad \tfrac{1}{2} \cdot \mu^2 \cdot R^2 \cdot N \cdot \sigma^2 < 1$$

genügen*). —

Es muß noch bewiesen werden, daß die Grenzfunktion ϑ der Differentialgleichung (32.) genügt. Es war

$$(35.) \qquad \vartheta_n = \sqrt{\omega} \cdot (\varrho - \varrho_0) - \mu^2 \cdot R^2 \cdot \int_{\varrho_0}^{\varrho} \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{\vartheta_{n-1}^{\nu}}{\varrho^4} \cdot d\varrho^2.$$

Da ϑ_n und ϑ_{n-1} für $n = \infty$ derselben Grenze ϑ zustreben, ist auch

$$\vartheta = \sqrt{\omega} \cdot (\varrho - \varrho_0) - \mu^2 \cdot R^2 \cdot \int_{\varrho_0}^{\varrho} \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{\vartheta^{\nu}}{\varrho^4} \cdot d\varrho^2,$$

und wenn man zweimal nach ϱ differenziert,

*) Man überzeugt sich leicht, daß die obigen Reihen auch gleichmäßig konvergieren, was für den folgenden Schluß von Wichtigkeit ist.

$$(32.) \qquad \frac{d^2\vartheta}{d\varrho^2} = -\mu^2 \cdot R^2 \cdot \frac{\vartheta^\nu}{\varrho^4}. \quad -$$

Die Form der Reihenentwicklung ist schon oben festgestellt worden; es ist

$$\begin{aligned}\vartheta = \sqrt{\omega} \cdot (\varrho - \varrho_0) &+ \lambda_{11} \cdot (\varrho - \varrho_0)^{\nu+2} + \lambda_{12} \cdot (\varrho - \varrho_0)^{2\nu+3} + \lambda_{13} \cdot (\varrho - \varrho_0)^{3\nu+4} + \cdots \\ &+ \lambda_{21} \cdot (\varrho - \varrho_0)^{\nu+3} + \lambda_{22} \cdot (\varrho - \varrho_0)^{2\nu+4} + \lambda_{23} \cdot (\varrho - \varrho_0)^{3\nu+5} + \cdots \\ &+ \lambda_{31} \cdot (\varrho - \varrho_0)^{\nu+4} + \lambda_{32} \cdot (\varrho - \varrho_0)^{2\nu+5} + \lambda_{33} \cdot (\varrho - \varrho_0)^{3\nu+6} + \cdots \\ &+ \cdots\cdots\cdots\

Über den natürlichen Dimensionsbegriff.

Von Herrn *L. E. J. Brouwer* in Amsterdam.

Auf Grund der Invarianz der Dimensionenzahl*) läßt sich die Dimensionenzahl einer Mannigfaltigkeit**) definieren als die Anzahl der Parameter, durch welche sich die Mannigfaltigkeit in der Umgebung eines beliebigen ihrer Punkte eineindeutig und stetig darstellen läßt. Diese „arithmetische" Definition trägt aber nach *Poincaré****) unserer intuitiven Raumanschauung ungenügend Rechnung. *Poincaré* erhebt deshalb die Forderung einer rekurrenten Definition von etwa folgender Form†):

„*Ein Kontinuum heiße n-dimensional, wenn man es durch ein oder mehrere* $(n-1)$*-dimensionale Kontinua in getrennte Stücke zerlegen kann.*"

Obgleich der n-dimensionale *Jordan*sche Satz††) auf die Möglichkeit einer derartigen Definition deutet, so läßt sich diese in der zitierten Form dennoch nicht aufrecht erhalten.

Zunächst bemerken wir, daß das Wort „*Kontinuum*" hier sicher nicht etwa im Sinne von „*Mannigfaltigkeit*" aufgefaßt werden darf; in diesem Falle würde nämlich die Definition erst brauchbar werden, nachdem eine von der Parameterdarstellung unabhängige Charakterisierung der Mannigfaltigkeiten unter den abstrakten Mengen gelungen sein würde. Weil dies aber bis jetzt nicht der Fall ist, so müßte der *Poincaré*schen Defini-

*) Vgl. meinen Beweis in Math. Annalen 70, S. 161—165 und die daran anknüpfenden Entwicklungen von *Lebesgue* in C. R. de l'Acad. des sciences, Paris, 27 mars 1911.

**) Für die Definition des Begriffes „Mannigfaltigkeit" vgl. Math. Annalen 71, S. 97.

***) Revue de métaphysique et de morale, 1912, S. 486, 487.

†) a. a. O., S. 488.

††) Vgl. den teilweise von *Lebesgue*, teilweise von mir erbrachten Beweis in C. R. de l'Acad. des sciences, Paris, 27 mars 1911, und Math. Annalen 71, S. 305—319.

tion irgendeine allgemeinere abstrakte Charakterisierung des Kontinuums vorausgeschickt werden, z. B. diese: „*Eine Normalmenge* (im *Fréchet*schen Sinne) π *heiße ein Kontinuum, wenn es für je zwei ihrer Elemente* m_1 *und* m_2 *eine zusammenhängende, abgeschlossene**) *Menge gibt, welche Teilmenge von* π *ist und* m_1 *und* m_2 *enthält.*“ **) Für solche allgemeinere Kontinua, welche keine Mannigfaltigkeiten sind, würde aber unsere Definition zu Schwierigkeiten führen; z. B. würde man einem Kegel des Cartesischen Raumes, der sich ja durch einen Punkt zerlegen läßt, nur *eine* Dimension zusprechen dürfen.

Auch die Worte „*ein oder mehrere*“ könnten nicht unverändert beibehalten werden, weil mehrere m-dimensionale Mannigfaltigkeiten zusammen eine $(m+p)$-dimensionale Mannigfaltigkeit bilden können.

Alle diese Mängel lassen sich nun beseitigen, indem wir zunächst die *Poincaré*sche rekurrente Definition wie folgt abändern:

Es sei π irgendeine Normalmenge***), π_1, ϱ und ϱ' drei Teilmengen von π, welche innerhalb π abgeschlossen†) sind und keine gemeinsamen Punkte besitzen. Alsdann heißen ϱ und ϱ' *in* π *durch* π_1 *getrennt*, wenn jede zusammenhängende, abgeschlossene Teilmenge von π, welche sowohl mit ϱ wie mit ϱ' Punkte gemeinsam hat, auch von π_1 mindestens einen Punkt enthält. Der Ausdruck: „π *besitzt den allgemeinen Dimensionsgrad* n“, in welchem n eine beliebige natürliche Zahl bezeichnet, soll nun besagen, daß für jede Wahl von ϱ und ϱ' eine trennende Menge π_1 existiert, welche den allgemeinen Dimensionsgrad $n-1$ besitzt, daß aber nicht für jede Wahl von ϱ und ϱ' eine trennende Menge π_1 existiert, welche einen geringeren allgemeinen Dimensionsgrad als $n-1$ besitzt. Weiter soll der Ausdruck: „π *besitzt den allgemeinen Dimensionsgrad Null bzw. einen unendlichen allgemeinen Dimensionsgrad*“ bedeuten, daß π kein Kontinuum als Teil ent-

*) Unter einer *abgeschlossenen* Menge verstehen wir hier eine ihre Grenzelemente enthaltende Menge, in welcher jede unendliche Folge von Elementen mindestens ein Grenzelement aufweist.

**) Diese Definition ist der von *Schoenflies* für die Kontinua des n-dimensionalen Raumes gegebenen nachgebildet (vgl. Bericht über die Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten, Bd. II, S. 117).

***) Inwieweit die Definition des Textes auch für Mengen allgemeinerer Art einen naturgemäßen Sinn behält, soll hier unerörtert bleiben.

†) Dieser Ausdruck besagt, daß π_1, ϱ und ϱ' alle ihre in π gelegenen Grenzpunkte enthalten.

hält, bzw. daß zu π weder die Null noch irgendeine natürliche Zahl als ihr allgemeiner Dimensionsgrad gefunden werden kann*).

Dieser Definition läßt sich leicht eine von der Rekurrenz unabhängige Form geben. Dazu denken wir uns die Menge π von zwei Personen A und B der „*Dimensionsoperation*" unterzogen, worunter wir folgendes verstehen: A wählt in π zwei innerhalb π abgeschlossene Teilmengen ϱ und ϱ' beliebig aus, worauf B ϱ und ϱ' in π trennt durch eine innerhalb π abgeschlossene Menge π_1. Sodann wählt A in π_1 zwei innerhalb π_1 abgeschlossene Teilmengen ϱ_1 und ϱ_1' beliebig aus, worauf B ϱ_1 und ϱ_1' in π_1 trennt durch eine innerhalb π_1 abgeschlossene Menge π_2. Dieser Prozeß wird unbeschränkt wiederholt, bis eventuell eine Menge π_h auftritt, welche kein Kontinuum mehr als Teil enthält. Wenn einerseits B unabhängig von den Wahlen der ϱ_ν und ϱ_ν' dafür sorgen kann, daß eine Menge π_h auftritt, deren $h \leqq n$, und andererseits A unabhängig von den Wahlen der π_ν dafür sorgen kann, daß *keine* Menge π_h auftritt, deren $h < n$, so werden wir sagen, daß π *den allgemeinen Dimensionsgrad* n *besitzt*. Wenn dagegen keine natürliche Zahl n existiert mit der Eigenschaft, daß B unabhängig von den Wahlen der ϱ_ν und ϱ_ν' dafür sorgen kann, daß eine Menge π_h auftritt, deren $h \leqq n$, so werden wir sagen, daß π *einen unendlichen allgemeinen Dimensionsgrad besitzt.*

Wenn zu einem Punkte P von π Umgebungen, welche den allgemeinen Dimensionsgrad m, aber keine Umgebungen, welche einen geringeren allgemeinen Dimensionsgrad besitzen, existieren, so werden wir sagen, daß π *in* P *den Dimensionsgrad* m *besitzt*. In verschiedenen Punkten kann eine Menge verschiedene Dimensionsgrade besitzen; keiner von diesen kann indes den allgemeinen Dimensionsgrad der Menge übersteigen. Falls in jedem Punkte der Menge der Dimensionsgrad dem allgemeinen Dimensionsgrade der Menge gleich ist, so werden wir sagen, daß die Menge *einen homogenen Dimensionsgrad besitzt.*

Auf Grund der vorstehenden Definitionen soll nun die *Poincaré*sche Forderung vollständig erfüllt werden durch die Begründung von folgendem

Dimensionssatz. *Eine* n*-dimensionale Mannigfaltigkeit besitzt den homogenen Dimensionsgrad* n**).

---

*) Nach dieser Definition wird sowohl für den *Hilbert*schen wie für den *Fréchet*schen R_ω ein unendlicher allgemeiner Dimensionsgrad gefunden.

**) Weil der Dimensionsgrad offenbar eine Invariante der Analysis Situs ist, so ist im Dimensionssatz die Invarianz der Dimensionenzahl enthalten.

Zum Beweise dieses Satzes zeigen wir zunächst, daß B bei der Dimensionsoperation dafür sorgen kann, daß $h \leqq n$. Dazu konstruiert B, nachdem A die Mengen ϱ und ϱ' bestimmt hat, eine simpliziale Zerlegung*) ζ von π, und zwar in solcher Weise, daß, wenn wir unter einem ${}_{\pi}s_{\varrho}$ bzw. ${}_{\pi}s_{\varrho'}$ ein entweder in seinem Inneren oder auf seiner Grenze Punkte von ϱ bzw. ϱ' enthaltendes Grundsimplex von ζ verstehen, kein ${}_{\pi}s_{\varrho}$ mit einem ${}_{\pi}s_{\varrho'}$ identisch ist und kein ${}_{\pi}s_{\varrho}$ an ein ${}_{\pi}s_{\varrho'}$ grenzt. Alsdann bilden diejenigen $(n-1)$-dimensionalen Seiten der ${}_{\pi}s_{\varrho}$, welche weder in ihrem Inneren noch auf ihrer Grenze Punkte von ϱ enthalten, ein System von zweiseitigen $(n-1)$-dimensionalen Pseudomannigfaltigkeiten**), in welchem übrigens mehrere Elemente oder Elementseiten zusammenfallen können. Die von diesen Pseudomannigfaltigkeiten gebildete Punktmenge wählt B als π_1. Falls darauf A die Mengen ϱ_1 und ϱ_1' in demselben Teilkontinuum von π_1 wählt, so konstruiert B eine solche simpliziale Zerlegung von π_1, daß kein ${}_{\pi_1}s_{\varrho_1}$ mit einem ${}_{\pi_1}s_{\varrho_1'}$ identisch ist und kein ${}_{\pi_1}s_{\varrho_1}$ an ein ${}_{\pi_1}s_{\varrho_1'}$ grenzt. Alsdann bilden diejenigen $(n-2)$-dimensionalen Seiten der ${}_{\pi_1}s_{\varrho_1}$, welche weder in ihrem Inneren noch auf ihrer Grenze Punkte von ϱ_1 enthalten, ein System von zweiseitigen $(n-2)$-dimensionalen Pseudomannigfaltigkeiten, in welchem übrigens wieder mehrere Elemente oder Elementseiten zusammenfallen können. Die von diesen Pseudomannigfaltigkeiten gebildete Punktmenge wählt B als π_2. In dieser Weise fortfahrend, gelangt B schließlich zu einer Menge π_n, welche kein Kontinuum mehr als Teil enthält, es sei denn, daß der Prozeß schon früher dadurch beendet wurde, daß A einmal ϱ_ν und ϱ_ν' nicht in demselben Teilkontinuum von π_ν wählte.

Wir zeigen zweitens, daß A bei der Dimensionsoperation dafür sorgen kann, daß h nicht kleiner als n ausfällt. Dazu wählt A in π von einem n-dimensionalen Elemente $E_1 E_2 \dots E_{n+1}$ den Punkt E_1 als ϱ und die $(n-1)$-dimensionale Seite $E_2 \dots E_{n+1}$ als ϱ'; den zur Elementseite $E_1 E_2$ bzw. $E_1 E_3 \dots E_{n+1}$ gehörigen Teil von π_1 als ϱ_1 bzw. ϱ_1'; den zur Elementseite $E_1 E_2 E_3$ bzw. $E_1 E_2 E_4 \dots E_{n+1}$ gehörigen Teil von π_2 als ϱ_2 bzw. ϱ_2'; usw. Um zu beweisen, daß von den Punktmengen $\pi_1, \pi_2, \dots \pi_n$ keine in Fortfall kommen kann, bezeichnen wir mit τ das Ausgangselement $E_1 E_2 \dots E_{n+1}$, mit τ_1 die Grenze des von π_1 in τ bestimmten, an den Punkt E_1 grenzenden

*) Math. Annalen 71, S. 101.

**) a. a. O., S. 305.

Gebiets g, mit τ_2 die Grenze der von π_2 in τ_1 bestimmten, an die Kante $E_1 E_2$ grenzenden Gebietsmenge*) g_1, mit τ_3 die Grenze der von π_3 in τ_2 bestimmten, an die zweidimensionale Seite $E_1 E_2 E_3$ grenzenden Gebietsmenge g_2, usw., konstruieren in τ eine simpliziale Zerlegung von der Dichte ε**), bezeichnen mit γ das n-dimensionale Fragment***), welches von den mitsamt ihrer Grenze zu g gehörigen Grundsimplexen gebildet wird, mit σ_1 den *innerhalb* τ gelegenen Teil der gleichfalls simplizial zerlegt vorliegenden Grenze von γ, mit ε_1 das Maximum der Abstände, welche die Punkte von σ_1 von τ_1 besitzen, mit γ_1 das $(n-1)$-dimensionale Fragment, welches von denjenigen Grundsimplexen von σ_1, die von g_1 einen Abstand $\leqq \varepsilon_1$ besitzen, gebildet wird, mit σ_2 den *innerhalb* σ_1 gelegenen Teil der Grenze von γ_1, mit ε_2 das Maximum der Abstände, welche die Punkte von σ_2 von τ_2 besitzen, und fahren so fort. Alsdann konvergieren $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ mit ε gegen Null, so daß die eventuelle Existenz von $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ diejenige von $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n$, mithin auch diejenige von $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_n$, in denen ja der Reihe nach $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n$ als Teilmengen enthalten sind, nach sich ziehen wird.

Hiermit ist der Dimensionssatz zurückgeführt auf folgenden

Hilfssatz. Es sei σ ein simplizial zerlegtes n-dimensionales Element mit den Eckpunkten $E_1, E_2, \ldots E_{n+1}$; γ ein aus Grundsimplexen von σ gebildetes Fragment, das alle an E_1, aber kein an $E_2 E_3 \ldots E_{n+1}$ grenzendes Grundsimplex von σ enthält; σ_1 der innerhalb σ liegende Teil der Grenze von γ; γ_1 ein aus Grundsimplexen von σ_1 gebildetes Fragment, das alle an $E_1 E_2$, aber kein an $E_1 E_3 \ldots E_{n+1}$ grenzendes Grundsimplex von σ_1 enthält; σ_2 der innerhalb σ_1 liegende Teil der Grenze von γ_1; γ_2 ein aus Grundsimplexen von σ_2 gebildetes Fragment, das alle an $E_1 E_2 E_3$, aber kein an $E_1 E_2 E_4 \ldots E_{n+1}$ grenzendes Grundsimplex von σ_2 enthält; σ_3 der innerhalb σ_2 liegende Teil der Grenze von γ_2; usw. Alsdann kann von den Punktmengen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots \sigma_n$ keine verschwinden.

---

*) Unter einer in τ_ν gelegenen Gebietsmenge verstehen wir eine in τ_ν gelegene Punktmenge, von der kein Punkt Grenzpunkt der durch sie in τ_ν bestimmten Komplementärmenge ist.

**) Math. Annalen 71, S. 101.

***) a. a. O., S. 306.

Dieser Hilfssatz, auf den schon *Lebesgue* in Math. Annalen 70 die Invarianz der Dimensionenzahl zurückgeführt hat, dessen Beweis daselbst aber eine wesentliche Lücke aufweist*), leuchtet unmittelbar ein, wenn wir den von mir in Math. Annalen 71 eingeführten Begriff des *Abbildungsgrades***) heranziehen.

---

*) Vgl. daselbst S. 167, wo derselbe Hilfssatz in folgender Form auftritt: *In einem n-dimensionalen Würfel I, der im R_n von den ebenen Räumen $x_i = x_i^0$ und $x_i = x_i^0 + 2l$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ begrenzt ist, bestimme man eine Gebietsmenge γ, deren innerhalb I gelegene Grenze σ_1 von einer endlichen Zahl von den $(n-1)$-dimensionalen Seiten von I parallelen $(n-1)$-dimensionalen Raumstücken gebildet wird, welche einen endlichen Abstand besitzt vom Raume $x_1 = x_1^0 + 2l$, und deren Komplementärmenge einen endlichen Abstand besitzt vom Raume $x_1 = x_1^0$. In σ_1 bestimme man eine Gebietsmenge γ_1, deren innerhalb I gelegene Grenze σ_2 von einer endlichen Zahl von den $(n-2)$-dimensionalen Seiten von I parallelen $(n-2)$-dimensionalen Raumstücken gebildet wird, welche einen endlichen Abstand besitzt vom Raume $x_2 = x_2^0 + 2l$, und deren Komplementärmenge einen endlichen Abstand besitzt vom Raume $x_2 = x_2^0$. In dieser Weise fahre man fort. Alsdann kann von den Punktmengen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ keine verschwinden.* Zum Beweise dieses Satzes wird nun a. a. O. folgende geometrische Schlußweise angewandt: „In σ_1 ist ein Teilkontinuum I_1 enthalten, das sich von $x_i = x_i^0$ bis $x_i = x_i^0 + 2l$ erstreckt für $i = 2, 3, \ldots n$. In der Grenze des zu I_1 gehörigen Teiles von γ_1 ist dann ein Teilkontinuum I_2 enthalten, das sich von $x_i = x_i^0$ bis $x_i = x_i^0 + 2l$ erstreckt für $i = 3, 4, \ldots n$. Ebenso ist in der Grenze des zu I_2 gehörigen Teiles von γ_2 ein Teilkontinuum I_3 enthalten, das sich von $x_i = x_i^0$ bis $x_i = x_i^0 + 2l$ erstreckt für $i = 4, 5, \ldots n$. In dieser Weise werden der Reihe nach $I_1, I_2, \ldots I_n$ definiert, und zeigt sich gleichzeitig die Existenz aller σ_ν, in denen ja die entsprechenden I_ν als Teilmengen enthalten sind." Daß indes eine derartige Schlußweise, welche aus der Eigenschaft, daß $I_{\nu-1}$ sich von $x_i = x_i^0$ bis $x_i = x_i^0 + 2l$ erstreckt für $i = \nu, \ldots n$, die Existenz folgert eines I_ν, das sich von $x_i = x_i^0$ bis $x_i = x_i^0 + 2l$ erstreckt für $i = \nu + 1, \ldots n$, nicht ohne weiteres erlaubt ist, erhellt aus folgendem Beispiel: Man wähle im Falle $n = 3$ für γ die Gesamtheit der durch folgende Formeln bestimmten Punktmengen:

$$1^0 \,.\, x_1^0 \leqq x_1 < x_1^0 + \tfrac{1}{4}l \,.\, 2^0 \,.\, x_1^0 + \tfrac{1}{2}l < x_1 < x_1^0 + \tfrac{3}{4}l \,.$$

$$3^0 \,.\, x_1^0 + \tfrac{1}{4}l \leqq x_1 \leqq x_1^0 + \tfrac{1}{2}l,\ x_i^0 + \tfrac{1}{2}l < x_i < x_i^0 + \tfrac{3}{2}l \,(i = 2, 3);$$

für I_1 dasjenige der beiden Teilkontinua, in welche σ_1 zerfällt, das der Würfelseite $x_1 = x_1^0$ am nächsten liegt; für γ_1 diejenigen Punkte von σ_1, für welche $x_2 \leqq x_2^0 + \frac{1}{2}l$, unter Ausschluß der Grenzpunkte der zugehörigen Komplementärmenge. Alsdann enthält die Grenze des zu I_1 gehörigen Teiles von γ_1 *kein* Teilkontinuum, das sich von $x_3 = x_3^0$ bis $x_3 = x_3^0 + 2l$ erstreckt.

Inzwischen hat Herr *Lebesgue* mir brieflich einen neuen geometrischen Beweis des Hilfssatzes mitgeteilt, den er demnächst im Bull. de la Soc. Math. de France zu veröffentlichen beabsichtigt.

**) Vgl. daselbst S. 105.

Die Eigenschaft, daß die Projektion von σ_ν aus der Elementseite $E_1 E_2 \dots E_\nu$ die Elementseite $E_{\nu+1} E_{\nu+2} \dots E_{n+1}$ mit dem Grade 1 bedeckt, läßt sich nämlich von ν auf $\nu + 1$ ausdehnen, indem wir zunächst aus ihr folgern, daß die Projektion des in der Elementseite $E_1 \dots E_\nu E_{\nu+2} \dots E_{n+1}$ liegenden Teiles der Grenze von σ_ν aus der Elementseite $E_1 \dots E_\nu$ oder aus der Elementseite $E_1 \dots E_{\nu+1}$ die Elementseite $E_{\nu+2} \dots E_{n+1}$ mit dem Grade 1 bedeckt, und sodann σ_ν, indem wir jedesmal ein einziges seiner Grundsimplexe tilgen, stückweise auf γ_ν reduzieren, wobei der in der Elementseite $E_1 \dots E_\nu E_{\nu+2} \dots E_{n+1}$ liegende Teil der Grenze von σ_ν schrittweise in $\sigma_{\nu+1}$ übergeht und der entsprechende Projektionsgrad auf $E_{\nu+2} \dots E_{n+1}$ sich nicht ändern kann. Weil mithin jedes σ_ν ($\nu = 1, 2, 3, \dots n$) sich mit dem Grade 1 auf eine $(n-\nu)$-dimensionale Seite von σ projiziert, so kann keines der σ_ν sich auf Null reduzieren. W. z. b. w.

Eindeutigkeit der Zerlegung in Primzahlfaktoren in quadratischen Zahlkörpern*).

Von Herrn *Georg Rabinowitsch* in Odessa.

In einer Straßburger Dissertation hat Herr *Jakob Schatunowski***) gezeigt, daß der *Euklid*ische Algorithmus des größten gemeinschaftlichen Teilers in quadratischen Zahlkörpern mit einer Diskriminante der Form $D = 1 - 4m$, wo $m > 3$ ist, im allgemeinen nicht mehr zum Ziele führt; er hat dort einen anderen Algorithmus angegeben, welcher in allen den quadratischen Zahlkörpern anwendbar ist, in denen jede Zahl nur auf eine Weise in Primzahlfaktoren***) zerlegt werden kann (ich nenne im folgenden solche Zahlkörper *einfache Körper*).

Durch diese Arbeit angeregt, versuchte ich auch einen solchen Algorithmus zu finden, indem ich *Euklids* Algorithmus verallgemeinerte. Ein Schritt des *Euklid*ischen Algorithmus besteht bekanntlich darin, daß das Zahlenpaar a, b durch das Zahlenpaar b, r ersetzt wird, wo r der Rest der Division von a durch b ist, d. h. eine Zahl der Form $a - by$, welche absolut kleiner als b ist. Dabei haben beide Paare dieselben gemeinsamen Teiler. In manchen quadratischen Körpern ist es aber nicht immer möglich, wenn α und β gegeben sind, eine Zahl η so zu finden,

*) Die Hauptresultate dieser Arbeit habe ich in einem Vortrag, welchen ich auf dem V. internationalen Mathematikerkongreß in Cambridge im August 1912 hielt, zusammengefaßt.

**) Der größte gemeinschaftliche Teiler von algebraischen Zahlen zweiter Ordnung mit negativer Diskriminante und die Zerlegung dieser Zahlen in Primfaktoren. Leipzig 1912.

***) Hier, ebenso wie in dem erwähnten Vortrage, bezeichnet „Primzahl“ eine Zahl des Körpers, welche durch keine andere Zahl des Körpers, außer den Einheiten, teilbar ist.

daß $\alpha - \beta\eta$ normal kleiner als β ist. Ich versuchte daher eine Zahl der Form $\alpha\xi - \beta\eta$ zu nehmen und die Zahlen ξ und η so zu wählen, daß erstens die Ungleichung

$$N(\alpha\xi - \beta\eta) < N\beta$$

erfüllt ist und zweitens die beiden Paare α, β und $\beta, \alpha\xi - \beta\eta$ dieselben gemeinsamen Teiler haben. Dabei stellte es sich heraus, daß die Möglichkeit, die erste Forderung zu erfüllen, d. h. die Lösbarkeit der Ungleichung, als charakteristische Bedingung der Einfachheit (im oben definierten Sinne) des Körpers, dienen kann. Die Notwendigkeit dieser Bedingung ist im vorliegenden Aufsatze in § 4 bewiesen, wo auch der Algorithmus besprochen und die Gleichung des größten gemeinsamen Teilers aufgestellt wird. In § 1 wird gezeigt, daß diese Bedingung hinreichend ist, und in den §§ 2 und 3 beschäftige ich mich mit einer anderen charakteristischen Bedingung, welche die Frage nach der Einfachheit eines quadratischen Körpers auf eine Frage über die Verteilung der (rationalen) Primzahlen zurückführt.

Im folgenden bezeichnen lateinische Buchstaben ganze rationale Zahlen, griechische ganze (im allgemeinen) irrationale. Ein Bruch ist niemals mit einem Buchstaben bezeichnet. Für die zu α konjugierte Zahl ist die Bezeichung $\bar{\alpha}$ benutzt. Das Zeichen $N\alpha$ bezeichnet die Norm der Zahl α.

§ 1. Eine Bedingung der Einfachheit.

Hilfssatz 1. In einem nicht einfachen Körper gibt es eine Zahl, welche durch eine Primzahl π teilbar ist, welche aber als ein Produkt von zwei Faktoren dargestellt werden kann, von denen keiner durch π teilbar ist.

Beweis. Ein nicht einfacher Körper ist ein solcher, in welchem die Zerlegung in Primzahlfaktoren nicht immer eindeutig ist. In einem solchen Körper muß es also eine Zahl geben, welche in zwei verschiedene Reihen von Primzahlen zerlegt werden kann. Es kann geschehen, daß in den beiden Zerlegungen dieselben Primzahlen vorkommen, es gibt aber gewiß eine Primzahl π, welche in einer Zerlegung öfter vorkommt als in der zweiten (sonst wären beide Zerlegungen identisch). Betrachten wir alle übrigen Primzahlen der zweiten Zerlegung (oder, falls π in der zweiten Zerlegung gar nicht vorkommt, alle Primzahlen dieser Zerlegung), so muß ihr Produkt $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdots$ durch π teilbar sein. Wir teilen nun diese Prim-

zahlen in zwei Gruppen und bilden die Produkte der Primzahlen jeder Gruppe für sich. Dabei kann es vorkommen, daß keines von diesen Teilprodukten durch π teilbar ist, dann ist das Produkt dieser Produkte, d. h. $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdots$ die gesuchte Zahl. Ist aber ein Teilprodukt $\sigma_1' \cdot \sigma_2' \cdot \sigma_3' \cdots$ durch π teilbar, so verfahren wir mit ihm ebenso wie mit dem ursprünglichen Produkte $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdots$. Wir erhalten so eine Reihe von Produkten $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdots$, $\sigma_1' \cdot \sigma_2' \cdot \sigma_3' \cdots$, $\sigma_1'' \cdot \sigma_2'' \cdot \sigma_3'' \cdots$, welche alle durch π teilbar sind und von denen jedes folgende aus weniger Primzahlen besteht als das vorangehende. Wenn wir nicht früher die gesuchte Zahl gefunden haben, so müssen wir also zu einem Produkt aus zwei Primzahlen kommen, von denen keine gleich π ist, welches aber durch π teilbar ist. Das ist dann die gesuchte Zahl.

Satz 1. Ist es möglich, sobald zwei Zahlen α und β eines Körpers gegeben sind, von denen keine durch die andere teilbar ist, zwei Zahlen ξ und η desselben Körpers zu finden, welche der Ungleichung

$$0 < N(\alpha\xi - \beta\eta) < N\beta \tag{1.}$$

genügen, so ist dieser Körper einfach.

Beweis. In einem nicht einfachen Körper gibt es nach dem Hilfssatze Produkte von zwei Faktoren, welche durch eine Primzahl π teilbar sind, ohne daß es die Faktoren sind. Betrachten wir die Normen aller Produkte, die in bezug auf π diese Eigenschaft haben, so muß es unter diesen Normen eine kleinste geben (da die Normen ja ganze rationale Zahlen sind). Es sei $\lambda \cdot \Lambda$ eines der Produkte, das diese kleinste Norm hat. Nach der Voraussetzung müssen zwei Zahlen ξ und η existieren von der Eigenschaft, daß die Zahl

$$\mu = \pi\xi - \lambda\eta \tag{2.}$$

den beiden Bedingungen

$$N\mu < N\pi \tag{3.}$$

und

$$N\mu < N\lambda \tag{4.}$$

genügt. Multiplizieren wir Gleichung (2.) mit Λ, so bekommen wir

$$\mu\Lambda = \pi\xi\Lambda - \lambda\Lambda \cdot \eta.$$

Es ist $\lambda\Lambda$ durch π teilbar, also ist es auch $\mu\Lambda$. Es ist ferner keiner der beiden Faktoren durch π teilbar (μ wegen der Ungleichung (3.), Λ weil es auch ein Faktor des Produktes $\lambda \cdot \Lambda$ ist). Es ist also $N(\mu \cdot \Lambda)$

eine derjenigen Normen, unter denen $N(\lambda \cdot \Lambda)$ die kleinste ist. Wir haben aber wegen (4.)

$$N(\mu \cdot \Lambda) = N\mu \cdot N\lambda < N\lambda \cdot N\Lambda,$$

also

$$N(\mu \cdot \Lambda) < N(\lambda \cdot \Lambda).$$

Dieser Widerspruch beweist den Satz.

Nennen wir zwei Zahlen, von denen keine durch die andere teilbar ist und die die Eigenschaft haben, daß die Ungleichung (1.) keine Lösungen hat — *ein störendes Zahlenpaar*, so können wir den eben bewiesenen Satz auch so aussprechen:

In einem nicht einfachen Körper gibt es mindestens ein störendes Zahlenpaar.

Teilen wir nun beide Teile der Ungleichung (1.) durch $N\beta$ (wie es Herr *Schatunowsky* in einem ähnlichen Falle tut), so bekommen wir

$$(5.) \qquad 0 < N\left(\frac{\alpha}{\beta}\xi - \eta\right) < 1.$$

Wir können auch so sagen: in einem nicht einfachen Körper muß es *störende Brüche* geben. Dabei nennen wir einen Bruch $\frac{\alpha}{\beta}$ störend, wenn es unmöglich ist, die Ungleichung (5.) zu befriedigen.

Es leuchtet unmittelbar ein, daß wenn $\frac{\alpha}{\beta}$ ein störender Bruch ist, auch der Bruch $\frac{\alpha}{\beta} + \xi$ störend sein muß.

Ist ferner $\frac{\alpha}{\beta}$ ein störender Bruch, ξ eine ganze Zahl und $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \xi$ *keine* ganze Zahl, so ist $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \xi$ ein störender Bruch.

§ 2. Die einfachsten störenden Brüche.

Wir wenden jetzt die beiden letzten Bemerkungen dazu an, um unter den störenden Brüchen die einfachsten zu finden. Das geschieht im folgenden

Satz 2. In einem nicht einfachen Körper gibt es wenigstens einen störenden Bruch von der Gestalt

$$\frac{p - \vartheta}{q},$$

wo $p < q$ und q eine Primzahl ist.

Beweis. Da der Körper nicht einfach ist, muß in ihm ein störender Bruch vorkommen. Indem wir seine beiden Glieder mit der zum Nenner konjugierten Zahl multiplizieren, können wir diesem Bruch die Form

$$\frac{P+R\vartheta}{q}$$

geben. Wir denken uns dabei die etwa vorhandenen gemeinsamen *rationalen* Teiler von Zähler und Nenner entfernt; die Zahlen P, R und q haben also keine gemeinsamen Teiler. (Wenn wir im folgenden von Teilern von rationalen Zahlen sprechen, so sind *rationale* Teiler gemeint; wenn von einer rationalen Zahl als von einer Primzahl die Rede ist, so ist damit gemeint, daß sie keine *rationalen* Teiler hat u. s. w.) Wir können ferner annehmen, daß q eine Primzahl ist, denn wäre es nicht der Fall, so könnten wir es erreichen, indem wir den Bruch mit einer geeigneten ganzen Zahl multiplizierten.

1. Wir beweisen zunächst, daß R und q relative Primzahlen sind. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir den größten gemeinsamen Teiler dieser Zahlen mit d und bilden den Ausdruck

$$\frac{P+R\vartheta}{q}\cdot\frac{q}{d}=\frac{P+R\vartheta}{d}=\frac{P}{d}+\frac{R}{d}\vartheta.$$

Nehmen wir an, daß d von 1 verschieden ist, so ist P durch d nicht teilbar (da sonst die Zahlen P, R und q einen gemeinsamen Teiler hätten). Der hingeschriebene Ausdruck ist also ein Bruch. Es ist außerdem $q:d$ eine ganze Zahl. Also ist dieser Bruch störend (s. Ende von § 1). Es ist ferner $\frac{R}{d}\vartheta$ auch eine ganze Zahl, also ist auch der Bruch

$$\frac{P+R\vartheta}{d}-\frac{R}{d}\vartheta=\frac{P}{d}$$

störend. Das kann aber nicht der Fall sein, weil es ein rationaler Bruch ist. (Ist $\frac{\alpha}{\beta}$ ein rationaler Bruch und y die größte in ihm enthaltene ganze Zahl, so brauchen wir nur $\xi=1$, $\eta=y$ zu setzen, um der Ungleichung (5.) zu genügen.) Also ist unsere Annahme falsch, d ist gleich 1, und die Zahlen R und q sind relativ prim.

2. Daraus folgt, daß es zwei Zahlen x und y gibt, die der Gleichung

$$Rx-qy=-1$$

genügen. Bilden wir den Ausdruck

$$\frac{P+R\vartheta}{q}x-y\vartheta=\frac{Px+(Rx-qy)\vartheta}{q}=\frac{Px-\vartheta}{q},$$

so ist es wiederum ein störender Bruch.

3. Nun teilen wir Px durch q und bezeichnen den Quotienten mit z und den (positiven) Rest mit p. Dann ist auch

$$\frac{Px-\vartheta}{q} - z = \frac{p-\vartheta}{q}$$

ein störender Bruch. Es ist hier $p < q$, also ist der Satz bewiesen.

Alles, was bis jetzt gesagt war, gilt für jeden quadratischen Körper. Von jetzt an beschränken wir uns auf Körper mit (negativer) Diskriminante der Form

$$D = 1 - 4m.$$

Wenn wir die Bezeichnung

$$\vartheta = \frac{1+\sqrt{D}}{2}$$

einführen, so kann bekanntlich jede ganze Zahl des Körpers in der Form $\xi = x + y\vartheta$ dargestellt werden, und umgekehrt ist jede Zahl dieser Form eine ganze Zahl des Körpers. Die Norm dieser Zahl ist

$$N\xi = x^2 + xy + my^2.$$

Ist ein Bruch störend, so ist seine Norm gewiß nicht kleiner als 1, weil sonst die Zahlen $\xi = 1$, $\eta = 0$ der Ungleichung (5.) genügen würden. Wenn der Bruch $\frac{p-\vartheta}{q}$ störend ist, so haben wir also die Ungleichung

$$\frac{p^2 - p + m}{q^2} \geqq 1$$

oder

$$p^2 - p + m \geqq q^2.$$

Ist noch q größer als p, so besteht a fortiori die Ungleichung, welche wir aus dieser erhalten, wenn wir p durch q ersetzen:

$$q^2 - q + m > q^2.$$

Daraus folgt aber $q < m$.

Wir haben also den folgenden Satz bewiesen:

Satz 3. Ist ein Bruch von der Form $\frac{p-\vartheta}{q}$ störend (und ist $p < q$), so ist $q < m$. (Die Bedingung in Klammern ist, wie leicht zu zeigen, überflüssig.)

Jetzt können wir statt des Satzes 2 sagen:

Satz 2^a. In einem nicht einfachen Körper gibt es wenigstens einen störenden Bruch von der Gestalt

$$\frac{p-\vartheta}{q},$$

wo $p < q < m$ und q eine Primzahl ist. (Ich möchte hier noch einmal

hervorheben, daß Satz 2 in allen quadratischen Körpern, Satz 2^a aber nur in quadratischen Körpern mit der Diskriminante $D = 1 - 4m$ gilt.)

§ 3. Die Prüfzahlen.

Unser bisheriges Ergebnis können wir auch so aussprechen: Ein Körper ist einfach, wenn es unter den Brüchen

$$\frac{p-\vartheta}{q} \qquad (p<q<m)$$

keine störenden gibt.

Wir haben also diese Brüche näher zu betrachten. Die Normen der Zähler dieser Brüche sind die $m-2$ Zahlen

$$p^2-p+m. \qquad (p=1,\dots m-2)$$

Ist p^2-p+m eine Primzahl, so sind die Zahlen p^2-p+m und q entweder einander gleich oder relativ prim. Das erste kann nicht der Fall sein, denn sonst würde der Bruch die Norm $\frac{1}{q}$ haben und folglich nicht störend sein; also gilt das zweite, und es gibt zwei Zahlen x und y, welche der Gleichung

$$(p^2-p+m)x-qy=1$$

genügen. Die Zahl p^2-p+m ist aber die Norm der Zahl $p-\vartheta$, also gleich dem Produkt aus dieser Zahl mit der zu ihr konjugierten Zahl $p-\bar{\vartheta}$. Die eben hingeschriebene Gleichung können wir also in der Form

$$\frac{p-\vartheta}{q}\cdot(p-\bar{\vartheta})x-y=\frac{1}{q}$$

schreiben, und in dieser Form zeigt sie (vgl. Ungleichung (5.)), daß der Bruch $\frac{p-\vartheta}{q}$ nicht störend ist, denn die Norm von $\frac{1}{q}$ ist $\frac{1}{q^2}$, also kleiner als 1. Aus dem Gesagten folgt

Satz 4. Der Bruch $\frac{p-\vartheta}{q}$, wo $p<q<m$ und q eine Primzahl ist, kann nicht störend sein, wenn die Zahl p^2-p+m eine Primzahl ist.

Sind *alle* solche Zahlen Primzahlen, so gibt es also keine störenden Brüche von der Form $\frac{p-\vartheta}{q}$, wo $p<q<m$ und q eine Primzahl ist. Da aber nach Satz 2^a in jedem nicht einfachen Körper solche Brüche vorhanden sein müssen, so gilt

Satz 5. Wenn alle Zahlen

$$p^2-p+m \qquad (p=1,\dots m-2)$$

Primzahlen sind, so ist der Körper mit der Diskriminante $D=1-4m$ einfach.

Wir wollen jetzt den Fall untersuchen, wo nicht alle diese Zahlen Primzahlen sind, um zu sehen, ob die Umkehrung von diesem Satze gilt. Bevor wir dazu übergehen, müssen wir aber die folgenden beiden Hilfssätze beweisen.

Hilfssatz 2. Die Norm einer irrationalen Zahl kann nicht kleiner als m sein.

Der *Beweis* stützt sich auf die beiden folgenden evidenten Tatsachen. Erstens, die Summe von zwei positiven ganzen Zahlen kann ihr Produkt höchstens um 1 übersteigen. Zweitens, sind x, y zwei ganze Zahlen und y von 0 verschieden, so ist

$$x^2 + xy + y^2 \geqq 1.$$

Nehmen wir unsere irrationale Zahl in der Form $x + y\vartheta$, so ist ihre Norm $x^2 + xy + my^2$, und y ist hier nicht gleich Null (sonst wäre die Zahl nicht irrational), also y^2 positiv. Indem wir nun die beiden erwähnten Sätze anwenden, bekommen wir

$$x^2 + xy + my^2 \geqq x^2 + xy + m + y^2 - 1$$
$$x^2 + xy + y^2 - 1 + m \geqq m.$$

Aus diesen Ungleichungen folgt der Satz.

Diesen Hilfssatz brauchen wir nur, um den folgenden zu beweisen.

Hilfssatz 3. Ist $p < m$, so ist $p - \vartheta$ eine Primzahl.

Beweis. Die Zahl $p - \vartheta$ kann keinen rationalen Teiler haben; wenn sie zusammengesetzt wäre, so könnte sie also als ein Produkt von zwei irrationalen Zahlen dargestellt werden. Das Produkt der Normen dieser Zahlen würde gleich $N(p - \vartheta) = p^2 - p + m$, also kleiner als m^2 sein. Eine dieser Zahlen müßte also eine Norm haben, welche kleiner als m ist, was nach Hilfssatz 2 unmöglich ist. Also ist der Satz bewiesen.

Mit Hilfe dieses Satzes werden wir jetzt den Fall untersuchen, wo nicht alle Zahlen $p^2 - p + m$ Primzahlen sind. Das geschieht in dem folgenden

Satz 6. Ist eine von den Zahlen

$$p^2 - p + m \qquad (p=1, \ldots m-1)$$

(rational) zusammengesetzt, so ist der Körper mit der Diskriminante $D = 1 - 4m$ nicht einfach.

Beweis. Es genügt, *eine* Zahl zu finden, welche in zwei verschiedene Reihen von Primzahlen zerlegt werden kann. Eine solche ist diejenige Zahl $p^2 - p + m$, welche rational zusammengesetzt ist. Sie zerfällt *einer-*

seits in die Faktoren $p-\vartheta$ und $p-\bar{\vartheta}$, welche nach dem eben bewiesenen Hilfssatze Primzahlen sind, und sie zerfällt *andererseits* nach der Voraussetzung in rationale Faktoren, so daß wir eine Gleichung der Form

$$(p-\vartheta)(p-\bar{\vartheta}) = a \cdot b \cdot c \cdots$$

haben. Hier brauchen $a, b, c, \ldots$ nicht Primzahlen unseres Körpers zu sein, aber es ist klar, daß wenn wir sie auch eventuell noch weiter spalten, wir rechts jedenfalls eine andere Zerlegung haben werden als links, w. z. b. w.

Aus den Sätzen 5 und 6 sehen wir, daß die Zahlen

$$p^2 - p + m \qquad (p=1, \ldots, m-1)$$

bei der Entscheidung der Frage über die Einfacheit eines Körpers eine große Rolle spielen. Es ist daher bequem, für sie einen besonderen Namen zu haben, und es scheint mir passend, sie *Prüfzahlen des Körpers* mit der Diskriminante $D = 1 - 4m$ zu nennen. Auf Grund der Sätze 5 und 6 können wir dann das folgende Merkmal aussprechen:

Ein Körper ist einfach oder nicht, je nachdem alle seine Prüfzahlen Primzahlen sind oder nicht.

Dieses Merkmal erlaubt die Frage, ob ein gegebener Körper einfach ist, sehr schnell zu lösen. Um die Berechnung der Prüfzahlen bequemer zu machen, bemerken wir, daß die Differenz zwischen zwei nebeneinanderstehenden Prüfzahlen die Form

$$(x+1)^2 - (x+1) + m - x^2 + x - m = 2x$$

hat, und wir können also diese Zahlen nach der Formel

$$m_{i+1} = m_i + 2i, \quad m_1 = m$$

sukzessive berechnen. Für $m = 17$, erhalten wir z. B.: $m_1 = 17$, $m_2 = 17 + 2 = 19$, $m_3 = 19 + 4 = 23$, $m_4 = 23 + 6 = 29$, $29 + 8 = 37$, $37 + 10 = 47$, $47 + 12 = 59$, $59 + 14 = 73$, $73 + 16 = 89$, $89 + 18 = 107$, $107 + 20 = 127$, $127 + 22 = 149$, $149 + 24 = 173$, $173 + 26 = 199$, $199 + 28 = 227$, $227 + 30 = 257 = m_{16}$. Alle diese Zahlen sind Primzahlen, also ist der Körper mit der Diskriminante $D = 1 - 4 \cdot 17 = -67$ ein einfacher Körper. Außer der Zahl 17 haben noch die Zahlen $2, 3, 5, 11, 41$ dieselbe Eigenschaft*). Es ist, so viel ich weiß, unbekannt, ob es noch weitere solche Zahlen gibt. Die Zahlkörper mit den entsprechenden Diskriminanten $-7, -11, -19,$

*) Diese Eigenschaft der Zahlen 41 und 17 ist schon *Euler* (Mémoires de Berlin, 1772, pag. 36) und *Legendre* (Théorie des Nombres, 1830, p. 13) bekannt.

$-43, -67, -163$ sind auch als die einzigen einfachen Körper ihrer Art bekannt*).

Bei allen anderen Werten von m, als den Werten $2, 3, 5, 11, 17, 41$ gibt es, wie es scheint, unter den Prüfzahlen immer zusammengesetzte Zahlen. Ist m zusammengesetzt, so brauchen wir keine anderen Prüfzahlen zu bilden, denn m ist selbst die erste Prüfzahl. Ist m eine Primzahl und ist ihre letzte Ziffer 3, so ist schon m_2 durch 5 teilbar, also zusammengesetzt; wenn die letzte Ziffer 9 ist, so ist es m_3. Ist m eine Primzahl, deren letzte Ziffer 1 oder 7 ist, so müssen wir die Formel (6.) benutzen und die erhaltenen Zahlen darauf prüfen, ob sie zusammengesetzt sind. In den meisten Fällen stoßen wir sehr schnell auf zusammengesetzte Zahlen.

Diese Methode erlaubt nicht nur, über die Einfachheit eines gegebenen Körpers zu entscheiden, sie erlaubt auch ziemlich leicht, an der Hand einer Primzahlentafel festzustellen, daß es unter den Körpern mit der Diskriminante $D = 1 - 4m$, wo m unter einer gegebenen Grenze liegt (z. B. 6000), außer den vorhergenannten keine einfachen Körper gibt. Die Fragen aber, ob es überhaupt noch solche Körper gibt, und ob es deren eine endliche oder unendliche Anzahl gibt, sind auf diese Weise nicht gelöst. Wir müssen uns damit begnügen, die Äquivalenz der folgenden beiden Fragestellungen erkannt zu haben.

1. Ist die Anzahl von *einfachen* quadratischen Zahlkörpern mit einer negativen Diskriminante der Form $D = 1 - 4m$ endlich oder unendlich?

2. Gibt es eine endliche oder eine unendliche Anzahl von Zahlen m, welche die Eigenschaft haben, daß alle Zahlen

$$x^2 - x + m \qquad (x = 1, \ldots m-1)$$

Primzahlen sind?

Bevor wir weitergehen, möchte ich noch auf ein Nebenresultat hinweisen. Satz 6 stellt nämlich mehr, als eine Umkehrung von Satz 5, dar. Dort handelt es sich um alle $m-1$ Prüfzahlen, hier (in Satz 5) nur um die ersten $m-2$ von ihnen. Die Sache liegt also so: wenn die ersten $m-2$ Prüfzahlen Primzahlen sind, so ist der Körper einfach; ist aber der Körper einfach, so sind alle Prüfzahlen, also auch die letzte, Primzahlen. Wenn wir also die quadratischen Körper beiseite lassen, können wir den folgenden Satz aussprechen:

*) Vgl. *H. Weber*, Algebra, Bd. 3, 1908, S. 460.

Sind die Zahlen

$$x^2 - x + m \qquad (x = 1, \ldots, m-2)$$

Primzahlen, so ist auch die Zahl

$$(m-1)^2 - (m-1) + m = m^2 - 2m + 2$$

eine Primzahl.

§ 4. Der Algorithmus.

Mit Hilfe der in den §§ 2 und 3 gewonnenen Ergebnisse gelingt es, die Umkehrung von Satz 1 zu beweisen.

Satz 7. Wenn in einem einfachen Körper zwei Zahlen α und β gegeben sind, von denen keine durch die andere teilbar ist, so ist es immer möglich, in demselben Körper zwei Zahlen ξ und η zu finden, welche der Ungleichung

$$(1.) \qquad 0 < N(\alpha\xi - \beta\eta) < N\beta$$

genügen.

Beweis. Wäre die Ungleichung nicht lösbar, so würde das Paar α, β ein störendes sein, und $\frac{\alpha}{\beta}$ würde einen störenden Bruch darstellen. Wenn wir diesen Bruch genau so behandelten, wie im Beweis von Satz 2, so erhielten wir einen störenden Bruch der Form $\frac{p-\vartheta}{q}$, wo $p < q < m$ ist. Nach Satz 4 wäre dann $p^2 - p + m$ eine zusammengesetzte Zahl und nach Satz 6 der Körper nicht einfach, was der Voraussetzung des zu beweisenden Satzes widerspricht.

Wir haben somit bewiesen, daß in einem einfachen Körper die Ungleichung (1.) lösbar ist, und in dem vorhergehenden (nämlich in den Beweisen der Sätze 2 und 4) ist ein Verfahren angegeben, um, wenn die Zahlen α und β gegeben sind, die Zahlen ξ und η tatsächlich zu berechnen. Nun war die Auflösung dieser Ungleichung ursprünglich als ein Schritt in einem Algorithmus gedacht, welcher den *Euklid*ischen Algorithmus zu ersetzen hat. Es sind aber erstens die Rechnungen, welche zur tatsächlichen Auflösung von (1.) führen, im allgemeinen nicht sehr einfach, und es entstehen zweitens noch weitere Komplikationen aus dem Umstande, daß die Zahlen ξ und η außer dieser Ungleichung noch einer anderen Forderung zu genügen haben, die darin besteht, daß die Paare α, β und $\beta, \alpha\xi - \beta\eta$ dieselben gemeinsamen Teiler haben müssen. Wenn aber auch das Verfahren

für praktische Zwecke unbrauchbar ist*), so leistet es doch in theoretischer Hinsicht dasselbe, was die Division mit Rest für die rationalen Zahlen leistet, es erlaubt nämlich, die Gleichung des größten gemeinsamen Teilers aufzustellen. Das wollen wir nun noch näher ausführen.

Wir betrachten alle Zahlen der Form $\alpha\xi - \beta\eta$. Unter den Normen dieser Zahlen muß es eine kleinste geben. Ist δ eine dieser Zahlen, welche die kleinste Norm haben, so ist es leicht zu zeigen, daß δ jede der beiden Zahlen α und β teilt. Denn, wenn δ kein Teiler von α, z. B., ist, so muß es zwei Zahlen ζ und τ geben, von der Eigenschaft, daß

$$N(\alpha\zeta - \delta\tau) < N\delta$$

ist. Die Zahl $\alpha\zeta - \delta\tau$ ist aber gleich $\alpha(\zeta - \tau\xi) + \beta\tau$, es ist also wieder eine Zahl der Form $\alpha\xi - \beta\eta$, und ihre Norm kann also nicht kleiner als $N\delta$ sein. Es ist also δ ein gemeinsamer Teiler von α und β, und da jeder andere Teiler dieser Zahlen die Zahl

$$\delta = \alpha\xi - \beta\eta$$

teilt, so ist δ der größte gemeinsame Teiler. Die eben hingeschriebene Gleichung stellt also die Gleichung des größten gemeinsamen Teilers dar.

Daraus folgt, daß, wenn α und β teilerfremde Zahlen eines einfachen Körpers sind, die Gleichung

$$\alpha\xi - \beta\eta = 1$$

Lösungen hat.

---

*) Es geschieht oft, daß die in der angedeuteten Weise gefundene Zahl ξ zu β relativ prim ist, dann ist, wie leicht zu sehen, diese Forderung von selbst erfüllt. Manchmal kann man, wenn das in allen Schritten der Fall ist, wirklich ziemlich schnell den größten gemeinsamen Teiler finden.

Über die Bestimmung des Sprunges der Funktion aus ihrer Fourierreihe.

Von Herrn *Leopold Fejér* in Budapest.

Einleitung.

Es sei $f(x)$ eine im Intervalle $(0, 2\pi)$ den *Dirichlet*schen Bedingungen genügende Funktion, die in diesem Intervalle eine oder mehrere Sprungstellen hat. Es sei

$$a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

die Fourierreihe von $f(x)$, und

$$s_0(x), s_1(x), \ldots s_n(x), \ldots$$

sollen die sukzessiven Partialsummen dieser Fourierreihe bezeichnen.

Es sei $x = x_0$ eine *Sprungstelle* von $f(x)$. Für eine solche Stelle lautet *Dirichlets**) klassischer Satz:

Die Folge

$$s_0(x_0), s_1(x_0), \ldots s_n(x_0), \ldots$$

ist konvergent, und ihr Grenzwert ist $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

Dieses *Dirichlet*sche Theorem gibt eine Methode, nach welcher man aus der Fourierreihe von $f(x)$ das *arithmetische Mittel* der beiden zur Sprungstelle $x = x_0$ gehörigen Grenzwerte $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$ durch einen einfachen Grenzprozeß erhalten kann.

Wie kann man aber durch einen einfachen Grenzprozeß aus der Fourierreihe von $f(x)$ die zur Sprungstelle $x = x_0$ gehörigen Grenzwerte $f(x_0+0)$ und $f(x_0-0)$ *selbst* herausbekommen, und also auch die Größe des Sprunges $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ bestimmen?

*) Dieses Journal, Bd. 4, 1829.

Vorliegende Arbeit gibt verschiedene Lösungen dieser Frage und enthält auch die Lösung des analogen Problems für die arithmetischen Mittel der Partialsummen der Fourierreihe von $f(x)$, d. h. des Problems: wie man durch einen einfachen Grenzprozeß aus den arithmetischen Mitteln der Partialsummen der Fourierreihe von $f(x)$ die zur Sprungstelle gehörigen Größen $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ bestimmen kann.

Es seien in dieser Einleitung einige Resultate dieser Arbeit zitiert. Das eine Theorem lautet:

Es sei $f(x)$ eine beliebige, den *Dirichlet*schen Bedingungen genügende Funktion von x und $x=x_0$ eine Sprungstelle dieser Funktion. Es seien $s_0(x), s_1(x), \dots s_n(x), \dots$ die Partialsummen der *Fourier*schen Reihe von $f(x)$. Dann konvergiert (nach *Dirichlet*) die Folge $s_0(x_0), s_1(x_0), \dots s_n(x_0), \dots$ gegen $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

Bedeutet nun g die kleinste (oder auch irgendeine) positive Wurzel der transzendenten Gleichung in z

$$\int_z^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = 0,$$

so sind auch die beiden Folgen

$$s_0(x_0),\ s_1\Big(x_0+\frac{g}{1}\Big),\ \dots\ s_n\Big(x_0+\frac{g}{n}\Big),\ \dots$$

$$s_0(x_0),\ s_1\Big(x_0-\frac{g}{1}\Big),\ \dots\ s_n\Big(x_0-\frac{g}{n}\Big),\ \dots$$

konvergent; und zwar konvergiert die obere Folge gegen $f(x_0+0)$, die untere Folge gegen $f(x_0-0)$.

Die Folge

$$s_1\Big(x_0+\frac{g}{1}\Big)-s_1\Big(x_0-\frac{g}{1}\Big),\ \dots\ s_n\Big(x_0+\frac{g}{n}\Big)-s_n\Big(x_0-\frac{g}{n}\Big),\ \dots$$

ist also auch konvergent, und ihr Grenzwert ist gleich $f(x_0+0)-f(x_0-0)$, d. h. gleich dem Sprunge, den die Funktion an der Stelle $x=x_0$ erleidet.

Dieses Theorem gehört auch zum Kreise jener Sätze, die sich auf die „*Gibbssche Erscheinung*“ beziehen*).

*) S. in bezug auf die *Gibbs*sche Erscheinung die neuerdings erschienene, sehr interessante Arbeit von Herrn *T. H. Gronwall* (Chicago): „Über die *Gibbs*sche Erscheinung und die trigonometrischen Summen $\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\dots+\frac{\sin nx}{n}$,“ Math. Annalen, Bd. 72, 1912.

Ein anderes Theorem dieser Arbeit lautet folgendermaßen:
Es sei

$$a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

die Fourierreihe einer den *Dirichlet*schen Bedingungen genügenden Funktion $f(x)$, deren Ableitung $f'(x)$ für $0 \leqq x \leqq 2\pi$ von beschränkter Schwankung ist. Bilde ich das n-fache arithmetische Mittel der ersten n Glieder der aus dieser Fourierreihe durch gliedweise Differentiation entstehenden Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu(b_\nu \cos \nu x - a_\nu \sin \nu x),$$

d. h. den Quotienten

$$\pi \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \nu(b_\nu \cos \nu x - a_\nu \sin \nu x)}{n},$$

so konvergiert dieses Mittel für eine Sprungstelle $x = x_0$ der Funktion $f(x)$ mit unendlich wachsendem n gegen den Sprung der Funktion an der Stelle $x = x_0$. D. h. es ist

$$\lim_{n=\infty} \frac{\pi \sum_{\nu=1}^{n} \nu(b_\nu \cos \nu x_0 - a_\nu \sin \nu x_0)}{n} = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0).$$

(Für eine Stelle x_0, wo $f(x)$ stetig ist, existiert natürlich dieser Limes auch; er ist aber dann gleich Null.)

Bei der Lösung der Frage für die arithmetischen Mittel

$$S_0(x),\ S_1(x),\ \ldots\ S_n(x),\ \ldots$$

der Partialsummen der Fourierreihe wende ich ein Theorem an, das als eine Verallgemeinerung meines Satzes für diese Mittel (Math. Annalen, Bd. 58) gelten kann, und welches so lautet:

Ist die Funktion $f(x)$ für $0 \leqq x \leqq 2\pi$ integrabel und endlich und a eine Stelle, wo $f(x)$ *stetig* ist, so ist nicht nur

$$\lim_{n=\infty} S_n(a) = f(a),$$

sondern auch

$$\lim_{n=\infty} S_n(a + \varepsilon_n) = f(a), \text{ wenn } \lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0.$$

(Die Bedingung der Endlichkeit von $f(x)$ kann weggelassen werden.)

Wenn die Funktion $f(x)$ für eine Umgebung $a - 2\delta \leqq x \leqq a + 2\delta$ von a stetig ist, so ist, wegen der sodann stattfindenden gleichmäßigen Konvergenz der $S_n(x)$ für $a - \delta \leqq x \leqq a + \delta$, die Richtigkeit von

$$\lim_{n=\infty} S_n(a+\varepsilon_n) = f(a), \text{ für } \lim \varepsilon_n = 0,$$

evident. Merkwürdigerweise ist aber diese Limesgleichung für beliebige integrable Funktionen richtig und also auch für die Stetigkeitsstellen solcher Funktionen, deren Unstetigkeitsstellen im Intervalle $(0, 2\pi)$ überall dicht liegen, und für welche ebendeshalb die $S_n(x)$ in *keinem* Intervalle gleichmäßig konvergieren können.

§ 1. Reduktion auf einen speziellen Fall.

1. Es sei $f(x)$ eine für $0 \leqq x \leqq 2\pi$ definierte reelle Funktion der reellen Variabeln x, die im Intervalle $(0, 2\pi)$ eine endliche Anzahl von Diskontinuitätsstellen und eine endliche Anzahl von Maxima und Minima besitzt. Die Diskontinuitätsstellen seien alle „Sprungstellen"; d. h., wenn x_0 eine solche Unstetigkeitsstelle bezeichnet, dann sollen die Grenzwerte $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$ beide existieren und voneinander verschieden sein. (Von einer solchen Funktion $f(x)$ sagt man, daß sie für $0 \leqq x \leqq 2\pi$ den „*Dirichlet*schen Bedingungen" genügt.) Die Differenz

$$f(x_0+0) - f(x_0-0)$$

soll „Größe des Sprunges" oder auch kurz der „Sprung" genannt werden und soll durch $D(x_0)$ oder auch kurz durch D bezeichnet werden. Unter $D(0)$ verstehe ich $f(+0) - f(-0)$, d. h. $f(+0) - f(2\pi - 0)$. Die Zahl $D(x_0)$ hat natürlich auch dann einen Sinn, wenn $f(x)$ für $x = x_0$ stetig ist; für eine solche Stelle ist sie gleich Null.

Es bezeichne $\varphi(x)$ diejenige Funktion, die für $0 < x < 2\pi$ gleich $\frac{\pi - x}{2}$, für $x = 0$ etwa gleich Null ist und nach 2π periodisch ist. Diese Funktion $\varphi(x)$ hat für $0 \leqq x < 2\pi$ die einzige Sprungstelle $x = 0$. Da

$$\varphi(+0) = \frac{\pi}{2},$$

$$\varphi(2\pi - 0) = -\frac{\pi}{2},$$

so ist für $\varphi(x)$

$$D(0) = \pi.$$

Es sei nun x_0 eine der Sprungstellen von $f(x)$.

Ich betrachte die Funktion

$$f(x) - \left\{ \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2} + \frac{f(x_0+0) - f(x_0-0)}{\pi} \varphi(x - x_0) \right\} = f_1(x).$$

Diese Funktion $f_1(x)$ ist sicher von beschränkter Schwankung; ihre Sprungstellen fallen mit den Sprungstellen von $f(x)$ zusammen, mit Ausnahme der Stelle $x = x_0$, wo sie *stetig* ist und den Wert Null hat. In der Tat:

$$f_1(x_0+0) = f(x_0+0) - \left\{\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} + \frac{f(x_0+0)-f(x_0-0)}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2}\right\} = 0,$$

$$f_1(x_0-0) = f(x_0-0) - \left\{\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} + \frac{f(x_0+0)-f(x_0-0)}{\pi} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\} = 0,$$

also

$$\lim_{x=x_0} f_1(x) = 0.$$

Ich habe also die bekannte Zerlegung

$$(1.)\quad f(x) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} + \frac{f(x_0+0)-f(x_0-0)}{\pi}\,\varphi(x-x_0) + f_1(x)$$

erhalten, wo $f_1(x)$ für $0 \leqq x \leqq 2\pi$ von beschränkter Schwankung ist und für $x = x_0$, und also auch für $x_0 - 2\delta \leqq x \leqq x_0 + 2\delta$ (wo $\delta > 0$ und entsprechend klein ist) stetig ist.

Nach einem Satze von *Heine* ist aber die Fouriersche Reihe von $f_1(x)$ im Intervalle $x_0 - \delta \leqq x \leqq x_0 + \delta$ gewiß *geichmäßig* konvergent. Daher genügt es (wie wir sehen werden) für meine Zwecke vollständig, wenn ich die Fourierreihe der Funktion $\varphi(x-x_0)$ für die Umgebung ihrer einzigen Sprungstelle $x = x_0$ der entsprechenden Untersuchung unterwerfe. Die Fourierreihe von $\varphi(x-x_0)$ entsteht aber aus der Fourierreihe von $\varphi(x)$ einfach dadurch, daß man in die letztere $x - x_0$ statt x setzt. Die Zerlegung (1.) führt also schließlich zur Untersuchung der Fourierreihe

$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n} + \cdots$$

der speziellen Funktion $\varphi(x) = \frac{\pi - x}{2}$ für die Umgebung der Stelle $x = 0$.

§ 2. Untersuchung der Fourierreihe von $\frac{\pi - x}{2}$ für die Sprungstelle $x = 0$.

2. Ich betrachte nun die Fourierreihe

$$(2.)\qquad \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n} + \cdots$$

der Funktion $\varphi(x) = \frac{\pi - x}{2}$.

Es sei*)

$$\sigma_n(x) = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n}.$$

Da

$$\frac{d\sigma_n(x)}{dx} = \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = -\frac{1}{2} + \frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}},$$

ist

$$\sigma_n(x) = -\frac{x}{2} + \int_0^x \frac{\sin(2n+1)\frac{\tau}{2}}{2\sin\frac{\tau}{2}}\,d\tau,$$

$$\text{(3.)} \qquad \sigma_n(x) = -\frac{x}{2} + \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt.$$

Ich werde mich auch mit den arithmetischen Mitteln der Partialsummen σ_n der Reihe (2.) beschäftigen; ich bilde also

$$\Sigma_{n-1}(x) = \frac{\sigma_0(x) + \cdots + \sigma_{n-1}(x)}{n} =$$

$$= \frac{1}{n}\left\{n\cdot\left(-\frac{x}{2}\right) + \int_0^{\frac{x}{2}} \left(\frac{\sin t}{\sin t} + \frac{\sin 3t}{\sin t} + \cdots + \frac{\sin(2n-1)t}{\sin t}\right)dt\right\}.$$

Da aber

$$\frac{\sin t}{\sin t} + \frac{\sin 3t}{\sin t} + \cdots + \frac{\sin(2n-1)t}{\sin t} = \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2,$$

so ist

$$\text{(4.)} \qquad \Sigma_{n-1}(x) = -\frac{x}{2} + \frac{1}{n}\int_0^{\frac{x}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt.$$

Die wichtigen Formeln (3.) und (4.) sollen nun etwas umgestaltet werden.

Es ist

$$\sigma_n(x) = -\frac{x}{2} + \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\,dt + \int_0^{\frac{x}{2}} \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right)\sin(2n+1)t\,dt.$$

Ich kann mich auf diejenigen Werte von x beschränken, die dem Intervalle $0 \leqq x \leqq \pi$ angehören. Dann ist $0 \leqq \frac{x}{2} \leqq \frac{\pi}{2}$. Da aber $\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}$

*) Außer der in der Einleitung zitierten Arbeit des Herrn *Gronwall* findet man noch in der Note des Herrn *Dunham Jackson*: „Über eine trigonometrische Summe“ (Rend. del Circ. mat. di Palermo, T. XXXII, 1911) interessante Ausführungen über die Summe $\sigma_n(x)$.

für $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ regulär ist, erhalte ich (z. B. durch Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes der Integralrechnung)

$$\int_0^{\frac{x}{2}} \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right) \sin (2n+1)t \, dt = \frac{A(n,x)}{2n+1},$$

wo

$$|A(n,x)| < a;$$

hier bedeutet a eine positive numerische Konstante. Also ist

$$\sigma_n(x) = -\frac{x}{2} + \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\sin (2n+1)t}{t} \, dt + \frac{A(n,x)}{2n+1},$$

oder schließlich

$$\text{(5.)} \qquad \sigma_n(x) = -\frac{x}{2} + \int_0^{(2n+1)\frac{x}{2}} \frac{\sin t}{t} \, dt + \frac{A(n,x)}{2n+1},$$

$$|A(n,x)| < a, \quad 0 \leqq x \leqq \pi. \qquad (n=0,1,2,3,\ldots)$$

Ähnlich läßt sich $\Sigma_{n-1}(x)$ umgestalten. Es ist

$$\Sigma_{n-1}(x) = -\frac{x}{2} + \frac{1}{n}\int_0^{\frac{x}{2}} \left(\frac{\sin nt}{t}\right)^2 dt + \frac{1}{n}\int_0^{\frac{x}{2}} \left(\frac{1}{\sin^2 t} - \frac{1}{t^2}\right) \sin^2 nt \, dt.$$

Da aber

$$\int_0^{\frac{x}{2}} \left(\frac{1}{\sin^2 t} - \frac{1}{t^2}\right) \sin^2 nt \, dt \leqq \int_0^{\frac{x}{2}} \left(\frac{1}{\sin^2 t} - \frac{1}{t^2}\right) dt \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin^2 t} - \frac{1}{t^2}\right) dt,$$

ist

$$\text{(6.)} \qquad \Sigma_{n-1}(x) = -\frac{x}{2} + \int_0^{n\frac{x}{2}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt + \frac{B(n,x)}{2n+1},$$

$$|B(n,x)| < b, \quad 0 \leqq x \leqq \pi, \qquad (n=0,1,2,3,\ldots)$$

wo b eine positive numerische Konstante bedeutet.

Aus den Formeln (5.) und (6.) sollen nun einige Schlüsse gezogen werden.

3. Ich will mich zunächst mit den gewöhnlichen Partialsummen der Reihe (2.) beschäftigen und betrachte dementsprechend die Formel (5.).

Es seien α und β zwei beliebige positive Zahlen. Die Folge der positiven Zahlen

$$\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \ldots,$$

wo

(7.) $$\xi_n = \frac{\beta}{n^\alpha},$$

ist dann eine monoton abnehmende, gegen Null konvergierende Folge.

Ich will nun den Grenzwert der Folge

$$\sigma_1\left(\frac{\beta}{1^\alpha}\right),\ \sigma_2\left(\frac{\beta}{2^\alpha}\right),\ \ldots\ \sigma_n\left(\frac{\beta}{n^\alpha}\right),\ \ldots,$$

d. h.

(8.) $$\lim_{n=\infty} \sigma_n\left(\frac{\beta}{n^\alpha}\right)$$

bestimmen.

Drei Fälle sind zu unterscheiden.

I. Fall: $\alpha > 1$.

Dann ist nach Formel (5.)

(9.) $$\sigma_n(\xi_n) = \sigma_n\left(\frac{\beta}{n^\alpha}\right) = -\frac{\beta}{2n^\alpha} + \int_0^{(2n+1)\frac{\beta}{2n^\alpha}} \frac{\sin t}{t}\, dt + \frac{A\left(n, \frac{\beta}{n^\alpha}\right)}{2n+1},$$

wenn nur n so groß ist, daß $0 \leqq \frac{\beta}{n^\alpha} \leqq \pi$.

Der erste und dritte der drei Summanden in (9.) konvergiert für $\lim n = \infty$ gegen Null. Aber auch der zweite Summand; denn die obere Grenze

$$(2n+1)\frac{\beta}{2n^\alpha}$$

des Integrals in (9.) konvergiert wegen $\alpha > 1$ gegen Null für $\lim n = \infty$, also auch das Integral selbst.

Für $\alpha > 1$ ist also, ganz unabhängig von der Wahl von β,

(10.) $$\lim_{n=\infty} \sigma_n\left(\frac{\beta}{n^\alpha}\right) = 0.$$

Da

$$\sigma_n\left(-\frac{\beta}{n^\alpha}\right) = -\sigma_n\left(\frac{\beta}{n^\alpha}\right),$$

ist auch

(10′.) $$\lim \sigma_n\left(-\frac{\beta}{n^\alpha}\right) = 0.$$

II. Fall: $\alpha = 1$. Dann ist nach Formel (5.)

(11.) $$\sigma_n(\xi_n) = \sigma_n\left(\frac{\beta}{n}\right) = -\frac{\beta}{2n} + \int_0^{\frac{2n+1}{2n}\beta} \frac{\sin t}{t}\, dt + \frac{A\left(n, \frac{\beta}{n}\right)}{2n+1},$$

wenn nur n so groß ist, daß $0 \leqq \frac{\beta}{n} \leqq \pi$.

Der erste und der dritte Summand konvergiert wieder gegen Null für lim $n = \infty$. Der zweite Summand in (11.) konvergiert gegen

$$\int_0^\beta \frac{\sin t}{t}\, dt,$$

da die obere Grenze des Integrals in (11.) für lim $n = \infty$ gegen β konvergiert.

Also ist

(12.) $$\lim_{n=\infty} \sigma_n\left(\frac{\beta}{n}\right) = \int_0^\beta \frac{\sin t}{t}\, dt,$$

und

(12′.) $$\lim_{n=\infty} \sigma_n\left(-\frac{\beta}{n}\right) = -\int_0^\beta \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

Dieser interessante Grenzwertsatz läßt sich übrigens viel einfacher und direkter in folgender Weise beweisen: Es ist

$$\sigma_n(x) = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n},$$

also ist

$$\sigma_n\left(\frac{\beta}{n}\right) = \frac{\sin\frac{\beta}{n}}{1} + \frac{\sin 2\frac{\beta}{n}}{2} + \cdots + \frac{\sin n\frac{\beta}{n}}{n}$$

$$= \frac{\beta}{n}\left(\frac{\sin\frac{\beta}{n}}{\frac{\beta}{n}} + \frac{\sin 2\frac{\beta}{n}}{2\frac{\beta}{n}} + \cdots + \frac{\sin n\frac{\beta}{n}}{n\frac{\beta}{n}}\right).$$

Daraus folgt aber schon

$$\lim_{n=\infty} \sigma_n\left(\frac{\beta}{n}\right) = \int_0^\beta \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

Die Formel (12.) zeigt, daß der Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} \sigma_n\left(\frac{\beta}{n}\right)$$

von β abhängt; es kann durch passende Wahl von β ein jeder Wert als Grenzwert erreicht werden, den das Integral

$$\int_0^\beta \frac{\sin t}{t}\, dt$$

für positive β annimmt.

Besonders interessant ist es nun β so zu wählen, daß

$$\int_0^\beta \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2},$$

(d. h. gleich $\varphi(+0)$) wird.

Wie bekannt, gibt es unendlich viele positive Werte von β, für welche das betrachtete Integral den Wert $\frac{\pi}{2}$ annimmt. [Das folgt leicht aus der Tatsache, daß die Flächeninhalte

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\, dt \qquad (k=0,1,2,3,\ldots)$$

monoton abnehmen, für $\lim k = \infty$ gegen Null konvergieren, und daß

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$$

ist.]

Da

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \int_0^{\beta} \frac{\sin t}{t}\, dt + \int_{\beta}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2},$$

sind die fraglichen Werte von β zugleich diejenigen positiven Werte von β, für welche

$$\int_{\beta}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = 0$$

ist; d. h. sie sind die positiven Wurzeln der ganzen transzendenten Funktion von z

$$\gamma(z) = \frac{\pi}{2} - \int_0^{z} \frac{\sin t}{t}\, dt = \int_z^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

[Die positiven Wurzeln

$$g_0, g_1, \ldots g_\nu, \ldots$$

von $\gamma(z)$ existieren, wie gesagt, in unendlicher Anzahl. Es ist

$$\nu\pi < g_\nu < (\nu+1)\,\pi. \qquad (\nu=0,1,2,3,\ldots)$$

Da

$$0 = \int_{g_\nu}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\cos g_\nu}{g_\nu} - \int_{g_\nu}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, dt,$$

ist

$$\frac{\cos g_\nu}{g_\nu} = \int_{g_\nu}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, dt,$$

woraus dann leicht

$$|\cos g_\nu| < \frac{2}{\nu\pi},$$

und schließlich

$$g_\nu = (2\nu+1)\,\frac{\pi}{2} + \frac{\theta_\nu}{\nu}, \quad -1 < \theta_\nu < 1 \qquad (\nu=1,2,3,\ldots)$$

folgt.]

Es sei nun g eine der Zahlen $g_0, g_1, \ldots$. [etwa die kleinste: g_0.] Dann ist, nach Gleichung (12.),

$$\lim_{n=\infty} \sigma_n\left(\frac{g}{n}\right) = \int_0^g \frac{\sin t}{t}\, dt,$$

d. h.

$$\lim_{n=\infty} \sigma_n\left(\frac{g}{n}\right) = \frac{\pi}{2}. \tag{14.}$$

Da

$$\sigma_n\left(-\frac{g}{n}\right) = -\sigma_n\left(\frac{g}{n}\right),$$

ist

$$\lim_{n=\infty} \sigma_n\left(-\frac{g}{n}\right) = -\frac{\pi}{2}. \tag{14'.}$$

III. Fall: $\alpha < 1$. Die Formel (5.) gibt dann für $\sigma_n(\xi_n) = \sigma_n\left(\frac{\beta}{n^\alpha}\right)$ wieder den Ausdruck (9.), nur daß eben jetzt $\alpha < 1$ ist. Für $\lim n = \infty$ konvergiert der erste und der dritte Summand in der Gl. (9.) wieder gegen Null, das Integral hingegen gegen

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2},$$

da doch, wenn $\alpha < 1$, die obere Grenze des Integrals in (9.)

$$\frac{2n+1}{2n^\alpha}\beta$$

für $\lim n = +\infty$ gegen $+\infty$ konvergiert.

Also ist in diesem Falle, ganz unabhängig von der Wahl von β,

$$\lim_{n=\infty} \sigma_n\left(\frac{\beta}{n^\alpha}\right) = \frac{\pi}{2}, \tag{15.}$$

und

$$\lim_{n=\infty} \sigma_n\left(-\frac{\beta}{n^\alpha}\right) = -\frac{\pi}{2}. \tag{15'.}$$

[Es ist also z. B.

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n}\right)_{x=\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{\pi}{2}.]$$

4. In dieser Nummer möchte ich kurz die analoge Frage für die arithmetischen Mittel

$$\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots \Sigma_{n-1}, \ldots$$

der Partialsummen der Reihe

$$\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\cdots+\frac{\sin nx}{n}+\cdots$$

erledigen.

Es sei wieder

$$\xi_n=\frac{\beta}{n^\alpha},\ \alpha>0,\ \beta>0. \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

Dann ist, nach Formel (6.),

$$(16.)\qquad \Sigma_{n-1}\left(\frac{\beta}{n^\alpha}\right)=-\frac{\beta}{2n^\alpha}+\int_0^{n\frac{\beta}{2n^\alpha}}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt+\frac{B\left(n,\frac{\beta}{n^\alpha}\right)}{2n+1},$$

wenn nur $0\leqq\frac{\beta}{n^\alpha}\leqq\pi$.

I. Fall: $\alpha>1$. Dann ist

$$\lim_{n=\infty}\Sigma_{n-1}\left(\frac{\beta}{n^\alpha}\right)=0.$$

II. Fall: $\alpha=1$. Dann ist

$$\lim_{n=\infty}\Sigma_{n-1}\left(\frac{\beta}{n}\right)=\int_0^{\frac{\beta}{2}}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt,$$

$$\lim_{n=\infty}\Sigma_{n-1}\left(-\frac{\beta}{n}\right)=-\int_0^{\frac{\beta}{2}}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt.$$

Da

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt=\frac{\pi}{2},$$

so ist es im Falle der arithmetischen Mittel *nicht* möglich, ein positives β zu finden, so daß

$$\int_0^{\frac{\beta}{2}}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$$

gleich $\frac{\pi}{2}$ ist.

III. Fall: $\alpha<1$. Dann ist

$$(17.)\qquad \lim_{n=\infty}\Sigma_{n-1}\left(\frac{\beta}{n^\alpha}\right)=\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt=\frac{\pi}{2},$$

und

$$(17'.)\qquad \lim_{n=\infty}\Sigma_{n-1}\left(-\frac{\beta}{n^\alpha}\right)=-\frac{\pi}{2}.$$

§ 3. Die Fourierreihe einer den *Dirichlet*schen Bedingungen genügenden Funktion in der Umgebung einer Sprungstelle.

5. Ich kehre nun zur allgemeinen Funktion $f(x)$, die den *Dirichlet*schen Bedingungen genügt, zurück. Ihre *Fourier*sche Reihe sei

$$f(x) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x),$$

wo also

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt,$$

$$a_\nu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos \nu t\,dt, \quad b_\nu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin \nu t\,dt. \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

Es sei x_0 eine Sprungstelle der Funktion $f(x)$. Nach *Dirichlet* konvergiert die Fourierreihe von $f(x)$ an der Sprungstelle x_0 und hat die Summe $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

D. h. wenn

$$s_n(x) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x),$$

so konvergiert die Folge der Partialsummen

$$(18.) \qquad s_0(x),\ s_1(x),\ \ldots\ s_n(x),\ \ldots$$

an der Stelle $x = x_0$ und hat den Grenzwert $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

Wie kann man nun aber aus der Folge (18.) der Partialsummen der *Fourier*schen Reihe von $f(x)$ die Werte $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$ und also auch die Größe des Sprunges $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ herausbekommen?

Die Gleichung (1.), in Verbindung mit den Gleichungen (14.), (14′.), liefert diesbezüglich unmittelbar das folgende Theorem:

Es sei $f(x)$ eine beliebige, den Dirichletschen Bedingungen genügende Funktion von x, und x_0 eine Sprungstelle dieser Funktion. Es seien

$$s_0(x),\ s_1(x),\ \ldots\ s_n(x),\ \ldots$$

die Partialsummen der Fourierschen Reihe von $f(x)$. Dann konvergiert (nach Dirichlet) die Folge

$$s_0(x_0),\ s_1(x_0),\ \ldots\ s_n(x_0),\ \ldots$$

gegen

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

Bedeutet nun g die kleinste (oder irgendeine) positive Wurzel der transzendenten Gleichung in z

$$\gamma(z) = \int_z^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = 0,$$

so sind auch die beiden Folgen

$$(19.) \qquad s_0(x_0),\ s_1\Big(x_0 + \frac{g}{1}\Big),\ \dots\ s_n\Big(x_0 + \frac{g}{n}\Big),\ \dots$$

$$(20.) \qquad s_0(x_0),\ s_1\Big(x_0 - \frac{g}{1}\Big),\ \dots\ s_n\Big(x_0 - \frac{g}{n}\Big),\ \dots$$

konvergent; und zwar konvergiert die Folge (19.) *gegen* $f(x_0 + 0)$ *und die Folge* (20.) *gegen* $f(x_0 - 0)$.

Die Folge

$$(21.) \quad s_1\Big(x_0 + \frac{g}{1}\Big) - s_1\Big(x_0 - \frac{g}{1}\Big),\ \dots\ s_n\Big(x_0 + \frac{g}{n}\Big) - s_n\Big(x_0 - \frac{g}{n}\Big),\ \dots$$

ist also auch konvergent, und ihr Grenzwert ist gleich

$$f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0),$$

d. h. gleich dem Sprunge, den die Funktion $f(x)$ *an der Stelle* x_0 *erleidet.*

6. Berücksichtige ich die Gleichungen (1.), (15.), (15′.), so erhalte ich, *daß die Folge*

$$s_0(x_0),\ s_1\Big(x_0 + \frac{\beta}{1^\alpha}\Big),\ \dots\ s_n\Big(x_0 + \frac{\beta}{n^\alpha}\Big),\ \dots$$

gegen $f(x_0 + 0)$, *und die Folge*

$$s_0(x_0),\ s_1\Big(x_0 - \frac{\beta}{1^\alpha}\Big),\ \dots\ s_n\Big(x_0 - \frac{\beta}{n^\alpha}\Big), \dots$$

gegen $f(x_0 - 0)$ *konvergiert. Hier bedeutet* β *eine beliebige positive Zahl,* α *eine beliebige positive Zahl* < 1.

7. Es sei $f(x)$ eine beliebige endliche und integrable Funktion und x_0 eine Sprungstelle dieser Funktion. Es seien

$$S_0(x),\ S_1(x),\ \dots\ S_{n-1}(x),\ \dots$$

die sukzessiven arithmetischen Mittel der Partialsummen der Fourierreihe von $f(x)$; d. h.

$$S_{n-1}(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \cdots + s_{n-1}(x)}{n}.$$

Dann konvergiert die Folge

$$S_0(x_0),\ S_1(x_0),\ \dots\ S_{n-1}(x_0),\ \dots$$

gegen $\dfrac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$. (Math. Annalen, Bd. 58.)

Das folgende Theorem besagt nun, wie sich die Grenzwerte $f(x_0 + 0)$, $f(x_0 - 0)$ einzeln aus der Folge der arithmetischen Mittel ergeben:

Die Folge

$$S_0(x_0),\ S_1\Big(x_0+\frac{\beta}{1^\alpha}\Big),\ \dots\ S_{n-1}\Big(x_0+\frac{\beta}{n^\alpha}\Big),\ \dots$$

konvergiert gegen $f(x_0+0)$, *die Folge*

$$S_0(x_0),\ S_1\Big(x_0-\frac{\beta}{1^\alpha}\Big),\ \dots\ S_{n-1}\Big(x_0-\frac{\beta}{n^\alpha}\Big),\ \dots$$

konvergiert gegen $f(x_0-0)$. *Hier bedeutet* β *eine beliebige positive Zahl und* α *eine beliebige positive Zahl* <1.

Dies folgt aus der Zerlegung (1.) und aus den Gleichungen (17.) und (17′.). Es muß aber beim Beweise dieses Satzes noch ein Theorem über die arithmetischen Mittel der Fourierreihe hinzugezogen werden, das ich für wichtig halte und kurz im nächsten Paragraphen auseinandersetzen möchte.

§ 4. Eine Verallgemeinerung des Theorems über die arithmetischen Mittel der Partialsummen einer Fourierreihe, die zu einer integrablen Funktion gehört.

8. Es sei $f(x)$ eine beliebige, für $0 \leqq x \leqq 2\pi$ *integrable* Funktion. (Sie sei, der Einfachheit halber, auch als beschränkt vorausgesetzt.)

Es sei $x=a$ eine Stelle, wo $f(x)$ *stetig* ist.

$$s_0(x),\ s_1(x),\ \dots\ s_n(x),\ \dots$$

sollen die Partialsummen der Fourierreihe von $f(x)$ und

$$S_0(x),\ S_1(x),\ \dots\ S_n(x),\ \dots$$

ihre sukzessiven arithmetischen Mittel bezeichnen.

Es sei

$$\varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \dots\ \varepsilon_n,\ \dots$$

eine Folge von Zahlen, die den Grenzwert Null hat.

Dann kann die Folge

$$s_0(a+\varepsilon_0),\ s_1(a+\varepsilon_1),\ \dots\ s_n(a+\varepsilon_n),\ \dots$$

bekanntlich divergent sein. Selbst wenn die Funktion $f(x)$ an jeder Stelle einer Umgebung $a-\delta \leqq x \leqq a+\delta$ von a stetig ist und noch dazu die Fourierreihe von $f(x)$ an allen diesen Stellen konvergiert, kann diese Folge divergieren. Ein Beispiel dafür bietet die trigonometrische Reihe

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} a_\varkappa \sin \varkappa x,$$

die ich in meiner Arbeit „Sur les singularités de la série de *Fourier* des fonctions continues“, (Annales de l'École Normale, 1911, p. 87—89), definiert habe. Sie ist die Fourierreihe einer überall stetigen, nach 2π peri-

odischen Funktion, und sie ist auch überall konvergent. Es läßt sich aber eine Folge

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots \varepsilon_n, \dots$$
$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$$

angeben, so daß

$$\overline{\lim_{n=\infty}} |s_n(\varepsilon_n)| = +\infty.$$

Um so merkwürdiger ist nun das folgende Theorem, das sich auf die arithmetischen Mittel $S_n(x)$ der Partialsummen der Fourierreihe einer beliebigen endlichen und integrablen Funktion bezieht:

Ist die Funktion $f(x)$ für $0 \leqq x \leqq 2\pi$ endlich und integrabel, und ist a eine Stelle, wo $f(x)$ stetig ist, so konvergiert die Folge

$$S_0(a+\varepsilon_0), S_1(a+\varepsilon_1), \dots S_n(a+\varepsilon_n), \dots$$

gegen $f(a)$, wenn $\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$ ist.

Das ist eine Verallgemeinerung meines Satzes über die arithmetischen Mittel einer Fourierreihe. Dieser Satz lautet:

$$\lim_{n=\infty} S_n(a) = f(a).$$

Jetzt soll also das allgemeinere Theorem bewiesen werden, laut welchem:

$$\lim_{n=\infty} S_n(a+\varepsilon_n) = f(a), \text{ wenn } \lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Wenn die Funktion für ein Intervall $a-2\delta \leqq x \leqq a+2\delta$ (wo $\delta > 0$) *stetig* ist, so ist das Theorem evident, da doch in diesem Falle die arithmetischen Mittel $S_n(x)$ für $a-\delta \leqq x \leqq a+\delta$ *gleichmäßig* gegen $f(x)$ konvergieren. Hat aber $f(x)$ in der Umgebung von a unendlich viele Sprünge, dann ist dieser Schluß natürlich nicht anwendbar, da doch in diesem Falle die Folge $S_n(x)$ in keinem Intervalle $a-\delta \leqq x \leqq a+\delta$ (wo $\delta > 0$) gleichmäßig konvergiert.

Es ist aber jedenfalls

$$S_{n-1}(x) = \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left(\frac{\sin n \frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} \right)^2 dt.$$

Ist nun ε eine beliebig kleine, aber feste positive Größe, so kann ich nach Voraussetzung ein positives δ finden, so daß

$$f(a) - \varepsilon \leqq f(x) \leqq f(a) + \varepsilon,$$

wenn

$$0 < a - 2\delta \leqq x \leqq a + 2\delta < 2\pi .$$

(Ich setze also stillschweigend voraus, daß a im Innern des Intervalles $(0, 2\pi)$ liegt. Diese Voraussetzung enthält natürlich keine wesentliche Einschränkung.) Ich zerlege nun:

$$S_{n-1}(x) = \frac{1}{2n\pi} \int_0^{a-2\delta} f(t) \left(\frac{\sin n \frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} \right)^2 dt + \frac{1}{2n\pi} \int_{a-2\delta}^{a+2\delta} \cdots + \frac{1}{2n\pi} \int_{a+2\delta}^{2\pi} \cdots .$$

Es sei nun x auf das Intervall

$$a - \delta \leqq x \leqq a + \delta$$

beschränkt. Für diese Werte von x konvergiert der erste und der dritte Summand für $\lim n = \infty$ gleichmäßig gegen Null. Was das zweite Integral betrifft, so ist mit Rücksicht auf den ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$\frac{1}{2n\pi} \int_{a-2\delta}^{a+2\delta} f(t) \left(\frac{\sin n \frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} \right)^2 dt = (f(a) + \sigma) \cdot \frac{1}{2n\pi} \int_{a-2\delta}^{a+2\delta} \left(\frac{\sin n \frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} \right)^2 dt ,$$

$$(a - \delta \leqq x \leqq a + \delta),$$

wo zwar die Größe σ von n und x abhängt, aber absolut genommen jedenfalls $\leqq \varepsilon$ ist. Da hier der Faktor von $f(a) + \sigma$ mit wachsendem n im Intervalle $a - \delta \leqq x \leqq a + \delta$ gleichmäßig gegen 1 konvergiert, ist also

$$f(a) - 2\varepsilon \leqq S_{n-1}(x) \leqq f(a) + 2\varepsilon \text{ für } a - \delta \leqq x \leqq a + \delta,$$

wenn nur n gehörig groß ist*).

Damit ist aber die Konvergenz der Folge $S_n(a + \varepsilon_n)$ gegen $f(a)$ für $\lim n = \infty$ schon bewiesen.

Die Bedingung der Endlichkeit von $f(x)$ kann weggelassen werden.

§ 5. Hinzuziehung der konjugierten Reihe.

9. Den auf die Folgen (19.), (20.), (21.) bezüglichen Sätzen kann ich noch eine andere Form geben.

Es ist

$$s_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x), \qquad (b_0 = 0),$$

*) Diese Ungleichung folgt auch aus einer Bemerkung, die Herr *Hurwitz* in seiner Arbeit „Über die *Fourier*schen Konstanten integrierbarer Funktionen“ (Math. Annalen, Bd. 57, 1903) i. B. auf die Mittel $S_n(x)$ machte. — Vgl. auch die Arbeit des Herrn *Friedrich Riesz*: „Über die Approximation einer Funktion durch Polynome“, Jahresbericht der D. Math.-Ver., 1908.

also

$$s_n\left(x_0+\frac{g}{n}\right)=\sum_{\nu=0}^{n}\left(a_\nu\cos\nu\left(x_0+\frac{g}{n}\right)+b_\nu\sin\nu\left(x_0+\frac{g}{n}\right)\right),$$

$$(22.)\qquad s_n\left(x_0+\frac{g}{n}\right)=\sum_{\nu=0}^{n}(a_\nu\cos\nu x_0+b_\nu\sin\nu x_0)\cos\nu\frac{g}{n}$$
$$+\sum_{\nu=0}^{n}(b_\nu\cos\nu x_0-a_\nu\sin\nu x_0)\sin\nu\frac{g}{n}.$$

Weiter ist

$$(23.)\qquad s_n\left(x_0-\frac{g}{n}\right)=\sum_{\nu=0}^{n}(a_\nu\cos\nu x_0+b_\nu\sin\nu x_0)\cos\nu\frac{g}{n}$$
$$-\sum_{\nu=0}^{n}(b_\nu\cos\nu x_0-a_\nu\sin\nu x_0)\sin\nu\frac{g}{n}.$$

Aus (22.) und (23.) erhalte ich also

$$(24.)\qquad \sum_{\nu=0}^{n}(b_\nu\cos\nu x_0-a_\nu\sin\nu x_0)\sin\nu\frac{g}{n}=\frac{s_n\left(x_0+\frac{g}{n}\right)-s_n\left(x_0-\frac{g}{n}\right)}{2}.$$

Wenn ich nun auf beiden Seiten der Gleichung (24.) zur Grenze $\lim n=\infty$ übergehe, so erhalte ich, auf Grund der Sätze (19.), (20.),

$$(25.)\qquad \lim_{n=\infty}\sum_{\nu=0}^{n}(b_\nu\cos\nu x_0-a_\nu\sin\nu x_0)\sin\nu\frac{g}{n}=\frac{f(x_0+0)-f(x_0-0)}{2}.$$

Zu diesem Resultate möchte ich einige Bemerkungen hinzufügen.

Die Fourierreihe von $f(x)$ ist

$$(26.)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)\qquad(b_0=0).$$

Die Reihe

$$(27.)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty}(b_\nu\cos\nu x-a_\nu\sin\nu x)$$

heißt die *konjugierte* Reihe von (26.).

Wenn $f(x)$ den *Dirichlet*schen Bedingungen genügt, so ist die konjugierte Reihe ihrer Fourierreihe an einer Sprungstelle $x=x_0$ von $f(x)$ *eigentlich divergent**). [Z. B.

$$f(x)=\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\cdots+\frac{\sin nx}{n}+\cdots.$$

Die Konjugierte dieser Reihe ist

$$\frac{\cos x}{1}+\frac{\cos 2x}{2}+\cdots+\frac{\cos nx}{n}+\cdots.$$

---

*) S. *A. Pringsheim:* „Über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise", Sitzb. der K. Bayr. Akad., math.-phys. Kl., München, 1900.

$x = 0$ ist eine Sprungstelle von $f(x)$. Die konjugierte Reihe ist an dieser Stelle in der Tat eigentlich divergent, denn sie lautet für $x = 0$

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots .\Big]$$

Während nun also die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (b_\nu \cos \nu x_0 - a_\nu \sin \nu x_0)$$

eigentlich divergent ist, so ist sie doch, wie Gl. (25.) zeigt, geeignet zur Bestimmung des halben Sprunges, den die Funktion $f(x)$ an der Sprungstelle $x = x_0$ erleidet. Man muß nur die Glieder ihrer n-ten Partialsumme der Reihe nach mit den (universellen) Konvergenzfaktoren

$$0,\ \sin \frac{g}{n}, \sin 2\,\frac{g}{n}, \ldots \sin n\,\frac{g}{n}$$

multiplizieren und dann in der so modifizierten Partialsumme zur Grenze $\lim n = \infty$ übergehen.

Es ist dies also ein Fall, in welchem eine eigentlich divergente Reihe sozusagen summiert wird, d. h., präziser ausgedrückt, die Glieder dieser eigentlich divergenten Reihe wurden zur Bestimmung eines „vernünftigen" Grenzwertes verwendet.

Ich kann also folgendes Theorem formulieren:

Die Fourierreihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x), \quad (b_0 = 0)$$

einer den Dirichletschen Bedingungen genügenden Funktion $f(x)$ ist an der Sprungstelle x_0

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x_0 + b_\nu \sin \nu x_0)$$

konvergent und hat die Summe

$$\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.$$

Die konjugierte Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (b_\nu \cos \nu x - a_\nu \sin \nu x)$$

ist zwar für $x = x_0$ eigentlich divergent, jedoch ist

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\nu=0}^{n} (b_\nu \cos \nu x_0 - a_\nu \sin \nu x_0) \sin \nu \frac{g}{n} = \frac{f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)}{2} = \frac{D(x_0)}{2}.$$

Ist man schon im Besitze der Werte $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ *und* $\frac{D(x_0)}{2}$, *so erhält man*

$$f(x_0+0)=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}+\frac{D(x_0)}{2}$$

und

$$f(x_0-0)=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}-\frac{D(x_0)}{2}.$$

§ 6. Noch eine Methode zur Bestimmung des Sprunges aus der Fourierreihe.

10. Es seien

$$x_1,\ x_2,\ \dots\ x_r$$

die der Größe nach geordneten Sprungstellen der Funktion $f(x)$ für $0 \leqq x < 2\pi$. Ich setze jetzt voraus, das $f(x)$ im Intervalle $(0, 2\pi)$ überall eine Ableitung besitzt, die im Intervalle $(0, 2\pi)$ etwa von beschränkter Schwankung ist. (Für die Sprungstellen $x_1, x_2, \dots x_r$ fordere ich natürlich nur die Existenz einer Ableitung nach rechts und nach links.)

Es sei

$$(29.)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty}(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \qquad (b_0 = 0)$$

die Fourierreihe von $f(x)$. Ich betrachte nun diejenige trigonometrische Reihe, die aus (29.) durch *gliedweise Differentiation* entsteht:

$$(30.)\qquad \sum_{\nu=1}^{\infty}\nu(b_\nu \cos \nu x - a_\nu \sin \nu x).$$

Da

$$a_\nu=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos \nu t\, dt,\quad b_\nu=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin \nu t\, dt,$$

ist

$$(31.)\qquad \pi(b_\nu \cos \nu x - a_\nu \sin \nu x)=\int_0^{2\pi} f(t)\sin \nu(t-x)\, dt.$$

Durch partielle Integration erhalte ich aber

$$\int_0^{2\pi} f(t)\sin \nu(t-x)\,dt=\left[\frac{-f(t)\cos \nu(t-x)}{\nu}\right]_0^{x_1-0}+\left[\frac{-f(t)\cos \nu(t-x)}{\nu}\right]_{x_1+0}^{x_2-0}+\cdots$$
$$+\left[\frac{-f(t)\cos \nu(t-x)}{\nu}\right]_{x_r+0}^{2\pi}+\frac{1}{\nu}\int_0^{2\pi} f'(t)\cos \nu(t-x)\,dt;$$

also ist

$$\pi\nu(b_\nu \cos \nu x - a_\nu \sin \nu x) = D_1 \cos \nu(x - x_1) + D_2 \cos \nu(x - x_2) + \cdots$$

(32.)
$$+ D_r \cos \nu(x - x_r) + \int_0^{2\pi} f'(t) \cos \nu(t - x)\, dt,$$

wo

$$D_1,\ D_2,\ \ldots\ D_r$$

der Reihe nach den Wert des Sprunges der Funktion $f(x)$ an den Sprungstellen

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_r$$

bedeuten. Da $f'(x)$ nach Voraussetzung für $0 \leqq x \leqq 2\pi$ von beschränkter Schwankung ist, ist

$$\lim_{\nu=\infty} \int_0^{2\pi} f'(t) \cos \nu(t - x)\, dt = 0,$$

(ja sogar

$$\left| \int_0^{2\pi} f'(t) \cos \nu(t - x)\, dt \right| < \frac{\text{const.}}{\nu}, \qquad 0 \leqq x \leqq 2\pi.) \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

Es ist also

(33.) $$\pi\nu(b_\nu \cos \nu x - a_\nu \sin \nu x) = \sum_{\varkappa=1}^{r} D_\varkappa \cos \nu(x - x_\varkappa) + \varepsilon_\nu(x),$$

wo, für $0 \leqq x \leqq 2\pi$ gleichmäßig,

$$\lim_{\nu=\infty} \varepsilon_\nu(x) = 0.$$

Ich will nun das π-fache arithmetische Mittel der ersten n Glieder der Reihe (30.) bilden. Ich setze also in die Gleichung (33.) statt ν der Reihe nach $1, 2, \ldots n$, addiere und dividiere durch n. Ich erhalte dann

(34.) $$\frac{\pi \sum_{\nu=1}^{n} \nu(b_\nu \cos \nu x - a_\nu \sin \nu x)}{n} = \frac{\sum_{\varkappa=1}^{r} \left(D_\varkappa \sum_{\nu=1}^{n} \cos \nu(x - x_\varkappa) \right)}{n} + \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu(x)}{n}.$$

Der Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu(x)}{n}$$

ist gewiß gleich Null, da doch $\lim_{\nu=\infty} \varepsilon_\nu(x) = 0$. Der Wert des Grenzwertes

(35.) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{\varkappa=1}^{r} \left(D_\varkappa \sum_{\nu=1}^{n} \cos \nu(x - x_\varkappa) \right)}{n}$$

aber hängt wesentlich davon ab, ob x einem der Werte $x_1, x_2, \ldots x_r$ gleich

ist, oder nicht. Im letzteren Falle, d. h. wenn $x \neq x_1, \ldots x_r$, ist der Grenzwert (35.) gleich Null. In diesem Falle schwankt nämlich

$$\sum_{\nu=1}^{n} \cos \nu (x - x_\varkappa) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots r)$$

mit unendlich wachsendem n zwischen *endlichen* Grenzen.

Ist aber

$$x = x_l,$$

so erhalte ich aus Gleichung (34.)

$$(36.) \quad \frac{\pi \sum_{\nu=1}^{n} \nu (b_\nu \cos \nu x_l - a_\nu \sin \nu x_l)}{n} = \frac{\sum_{\varkappa=1}^{l-1} D_\varkappa \Big(\sum_{\nu=1}^{n} \cos \nu (x_l - x_\varkappa) \Big)}{n} + D_l + \frac{\sum_{\varkappa=l+1}^{r} D_\varkappa \Big(\sum_{\nu=1}^{n} \cos \nu (x_l - x_\varkappa) \Big)}{n} + \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu (x_l)}{n},$$

und also

$$\lim_{n=\infty} \pi \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \nu (b_\nu \cos \nu x_l - a_\nu \sin \nu x_l)}{n} = D.$$

Ich kann also folgendes Theorem aussprechen:

Es sei

$$(37.) \qquad a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

die Fourierreihe einer den Dirichletschen Bedingungen genügenden Funktion $f(x)$, deren Ableitung $f'(x)$ für $0 \leqq x \leqq 2\pi$ von beschränkter Schwankung ist. Bilde ich das π-fache arithmetische Mittel der ersten n Glieder der aus (37.) *durch gliedweise Differentiation entstehenden Reihe*

$$(38.) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu (b_\nu \cos \nu x - a_\nu \sin \nu x),$$

d. h. den Quotienten

$$\frac{\pi \sum_{\nu=1}^{n} \nu (b_\nu \cos \nu x - a_\nu \sin \nu x)}{n},$$

so konvergiert dieses Mittel für eine Sprungstelle $x = x_0$ der Funktion $f(x)$

mit unendlich wachsendem n gegen den Sprung der Funktion an der Stelle $x = x_0$. *D. h. es ist*

$$(39.)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\pi \sum_{\nu=1}^{n} \nu(b_\nu \cos \nu x_0 - a_\nu \sin \nu x_0)}{n} = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0).$$

(Für eine Stelle x_0, *wo* $f(x)$ *stetig ist, existiert dieser Limes auch; er ist dann gleich Null.)*

Ich möchte zu diesem Theoreme noch einige erläuternde Bemerkungen hinzufügen.

Hat die Funktion $f(x)$ einen Sprung oder mehrere Sprünge, so ist die Reihe (38.), die aus der Fourierreihe (37.) von $f(x)$ durch gliedweise Differentiation entsteht, bekanntlich für jedes x divergent. Die Folge der arithmetischen Mittel der *Partialsummen* dieser divergenten Reihe (38.) ist aber für jedes x, das von den Sprungstellen der Funktion $f(x)$ verschieden ist, konvergent und hat den Grenzwert $f'(x)$. (Math. Annalen, Bd. 58). Was nun das Verhalten der Reihe (38.) an einer *Sprungstelle* von $f(x)$ betrifft, so habe ich seinerzeit konstatiert, daß die Reihe an diesen Stellen eigentlich divergent ist (woraus dann folgt, daß auch die Folge der arithmetischen Mittel der Partialsummen an einer solchen Stelle eine eigentlich divergente Folge ist), habe aber aus der eigentlich divergenten Reihe (38.) keinen Nutzen ziehen können. Jetzt kann ich sagen, daß das arithmetische Mittel der n ersten *Glieder* dieser, für die Sprungstelle eigentlich divergenten Reihe, mit π multipliziert, gegen den Sprung der Funktion $f(x)$ konvergiert, wenn $\lim n = \infty$.

Ist $x_0 = 0$ eine Sprungstelle von $f(x)$, so lautet für diese Stelle die Gleichung (39.) besonders einfach:

$$(40.)\quad \lim_{n=\infty} \pi \frac{b_1 + 2b_2 + \cdots + nb_n}{n} = f(+0) - f(-0).$$

Hat die Funktion $f(x)$ im Intervalle $0 \leqq x < 2\pi$ nur eine *einzige* Sprungstelle x_0, so läßt sich das Verfahren (39.) wesentlich vereinfachen. In diesem Falle lautet nämlich die Gleichung (33.)

$$(41.)\quad \pi\nu(b_\nu \cos \nu x - a_\nu \sin \nu x) = D_0 \cos \nu(x - x_0) + \varepsilon_\nu(x),$$

wo

$$D_0 = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0).$$

Setze ich in (41.) $x = x_0$

$$\pi\nu(b_\nu \cos \nu x_0 - a_\nu \sin \nu x_0) = D_0 + \varepsilon_\nu(x_0),$$

so ergibt sich

$$\lim_{\nu=\infty} \pi\nu(b_\nu \cos \nu x_0 - a_\nu \sin \nu x_0) = D_0, \tag{42.}$$

d. h.:

Wenn die Funktion $f(x)$ im Intervalle $0 \leqq x < 2\pi$ nur einen einzigen Sprung x_0 hat, so konvergiert schon das mit π multiplizierte n-te Glied der Reihe (38.) *gegen den Sprung von $f(x)$ für $x = x_0$.*

Ist $x_0 = 0$ die einzige Sprungstelle von $f(x)$ für $0 \leqq x < 2\pi$, so ist nach (42.)

$$\lim_{\nu=\infty} \pi\nu\, b_\nu = f(+0) - f(-0). \tag{43.}$$

(Vgl. auch meine Arbeit: Math. Annalen, Bd. 64, 1907.)

Über das *Poisson*sche Integral und über die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung des logarithmischen Potentials.

Von Herrn *Leon Lichtenstein* in Berlin.

Es sei mir gestattet, mit wenigen Worten auf meine wie oben betitelte Abhandlung zurückzukommen*).

In § 4 wird der Satz bewiesen:

Es sei $f(\theta)$ eine stetige Funktion, die eine nicht notwendig beschränkte, nebst ihrem Quadrate integrierbare Ableitung hat. Alsdann ist, höchstens mit Ausnahme einer gewissen Nullmenge von Punkten (R, θ_0),

$$\lim_{\substack{r=R \\ \varphi=\theta_0}} \frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r} = \psi(\theta_0)$$

vorhanden. Die Funktion $[\psi(\theta_0)]^2$ ist integrierbar. Hierbei bezeichnet $u(r, \varphi)$ diejenige im Innern des Kreises K vom Halbmesser R um den Koordinatenursprung reguläre Potentialfunktion, die am Rande gleich $f(\theta)$ wird.

Dieser Satz bedarf insofern einer Ergänzung, als bei dem Beweise stillschweigend vorausgesetzt wird, daß

$$\text{(1.)} \qquad \int_0^\theta f'(\theta)\,d\theta = f(\theta) - f(0).$$

Unser Satz (Vgl. auch Einleitung, S. 13) lautet nunmehr so:

Ist die Funktion $f(\theta)$ das unbestimmte Integral ihrer quadratisch integrierbaren Ableitung, so ist, außer höchstens in einer gewissen Nullmenge der Punkte (R, θ_0),

*) Vgl. dieses Journal, Bd. 141, Heft 1, S. 12—42.

$$\lim_{\substack{r=R \\ \varphi=\theta_0}} \frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r} = \psi(\theta_0)$$

vorhanden und quadratisch integrierbar.

In § 6 wird dieser Satz auf das logarithmische Potential einer einfachen Linienbelegung angewandt. Die Bedingung (1.) ist dort erfüllt.

In analoger Weise ist der auf S. 32 angegebene Satz zu ergänzen: *Damit eine in K reguläre Potentialfunktion $u_0(r,\varphi)$ als Potential einer einfachen Linienbelegung dargestellt werden kann, ist, außer wenn $R=1$, notwendig und hinreichend, daß ihre Randfunktion $F(\theta)$ das unbestimmte Integral ihrer quadratisch integrierbaren Ableitung ist.*

Beiträge zur Arithmetik der hyperelliptischen Funktionenkörper.

Von Herrn *Robert König* in Leipzig.

Einleitung.

Es wird im folgenden der Versuch gemacht, eine der Theorie des quadratischen Zahlkörpers durchaus analoge Behandlung der hyperelliptischen Funktionenkörper auf rein arithmetischer Grundlage zu geben.

Hierbei bediene ich mich der *Hensel-Landsberg*schen Darstellung der Funktionen durch Divisoren*).

Der erste Abschnitt handelt von der Teilbarkeit der ganzen Divisoren nullter Ordnung, welche auf der Auszeichnung des unendlich fernen Punktes beruht.

Im zweiten Abschnitt werden zunächst Kongruenzen nach einem primären Modul betrachtet. Kongruente Divisoren werden in Klassen zusammengefaßt und ein vollständiges Repräsentantensystem für dieselben mittels je eines reduzierten Divisors innerhalb der einzelnen Klassen aufgestellt. Die zu dem Modul teilerfremden Klassen bilden insbesondere eine kontinuierliche unendliche *Abel*sche Gruppe, deren einfachste Untergruppen untersucht werden. Die Auflösung der linearen Kongruenzen nach einem beliebigen Modul ergibt schließlich, daß eine ein-eindeutige Korrespondenz zwischen den Idealen des Funktionenkörpers und den ganzen Divisoren nullter Ordnung besteht.

Der dritte Abschnitt beruht auf der Zusammenfassung äquivalenter

*) Vgl. hierzu das Werk von *Hensel* und *Landsberg*: „Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln usw.“ Leipzig, Teubner 1902.

Divisoren in Klassen. Satz IV. (S. 203) ist das Analogon zu dem Satz von *Minkowski* in der Theorie der algebraischen Zahlkörper*) und läßt die *arithmetische* Bedeutung der Geschlechtszahl des Körpers erkennen. Ferner wird auch hier ein vollständiges Repräsentantensystem für die Divisorenklassen vermöge je eines reduzierten primären Divisors aufgestellt.

Die genauere Untersuchung der in einer beliebigen Divisorenklasse nullter Ordnung vorhandenen Divisoren führt dann zu dem *verallgemeinerten Weierstraßschen Lückensatz*, der hier in seiner rein arithmetischen Bedeutung, durchaus losgelöst von den Integralen erscheint**). Es wird nicht nur angegeben, wieviele Divisoren in jeder Klasse fehlen, sondern genau welche.

Die genannten Divisorenklassen bilden eine kontinuierliche unendliche *Abel*sche Gruppe, deren einfachste Elemente, die zweiseitigen Klassen, bestimmt werden. Die Frage nach der Bedeutung der zugehörigen Charaktere führt zu einer neuen Einteilung der (geschlossenen) Wege auf der *Riemann*schen Fläche in Klassen. Bisher hat man sozusagen nur eine zur Gesamtgruppe gehörige Einteilung gekannt, es gehört aber auch zu jeder Untergruppe eine solche***).

Der vierte Abschnitt bringt endlich einen kurzen Abriß einer Theorie der binären quadratischen Formen mit rationalen Funktionen als Koeffizienten†.) Die Formen, deren Diskriminante gleich derjenigen des Körpers ist, werden den ganzen Divisoren nullter Ordnung zugeordnet und umgekehrt. Und zwar entsprechen nicht nur Divisoren- und Formen*klassen* einander ein-eindeutig, sondern die Divisoren und Formen selbst, wofern man den Begriff der „reduzierten primären" Form einführt. Es gibt dann in jeder Formenklasse eine und nur eine solche Form (Satz VIII). Die

---

*) S. *D. Hilbert*, Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresbericht d. D. Math.-Vereinigung, 4. Bd. (1897), S. 224.

**) In allgemeinster Form wurde der Satz in meiner Arbeit: „Zur arithmetischen Theorie usw.", Berichte d. Math.-phys. Klasse d. K. Ges. d. Wiss. zu Leipzig, Sitzung vom 17. Juli 1911, hergeleitet. Derselbe findet sich auch in dem fast gleichzeitig erschienenen Werk von *Prym-Rost*: „Theorie der *Prym*schen Funktionen 1. Ordnung", Leipzig, Teubner 1911, Bd. II. S. 222.

***) S. Näheres in § 9.

†) Vgl. die Arbeit des Verfassers: „Über die quadratischen Formen mit rationalen Funktionen als Koeffizienten", Wiener Monatshefte für Math. u. Phys., 23. Jahrg. (1912), S. 321—346.

meisten aus der elementaren Theorie der quadratischen Formen bekannten Begriffsbildungen finden hier ein überaus anschauliches Analogon; nur die Frage nach der Bedeutung der Charaktere der zweiseitigen (allgemein auch n-seitigen) Klassen fällt hier sehr verschieden aus.

Schließlich folgt noch ein Satz über Formen, deren Diskriminante einen quadratischen Teiler hat.

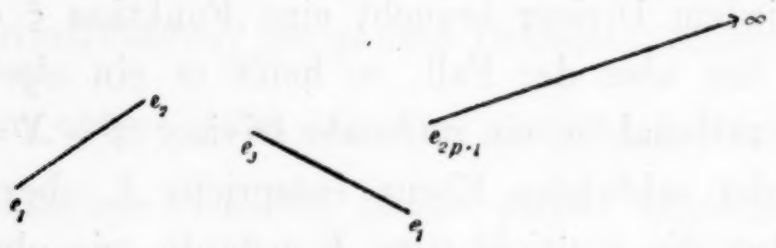
I. Von der Teilbarkeit.

§ 1. Vorbemerkungen*).

Wir betrachten im folgenden den Funktionenkörper $\Re(\sqrt{\Delta})$, d. i. die Gesamtheit aller Funktionen der Form $X + Y\sqrt{\Delta}$, wo X, Y beliebige rationale Funktionen der unabhängigen Variabeln z sind und Δ den Ausdruck

$$\Delta = (z - e_1)(z - e_2) \cdots (z - e_{2p+1}) \tag{1.}$$

bedeutet, unter $e_1, e_2, \ldots e_{2p+1}$ beliebige, voneinander verschiedene Punkte der z-Ebene verstanden. Wir denken uns ferner die zweiblättrige *Riemann*sche Fläche R_z konstruiert, auf welcher die Funktionen des Körpers eindeutig ausgebreitet sind, und das Vorzeichen von $\sqrt{\Delta}$ in einem von den $e_i (i = 1, 2, \ldots 2p+1)$ verschiedenen Punkt fixiert. Dadurch ist dann $\sqrt{\Delta}$ für die ganze Fläche R_z in unzweideutiger Weise erklärt. Vgl. die schematische Figur:



Die Punkte der *Riemann*schen Fläche bezeichnen wir mit großen deutschen Buchstaben, die Punkte der schlichten Ebene mit den entsprechenden kleinen Buchstaben; die Verzweigungspunkte insbesondere mit $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \ldots \mathfrak{E}_{2p+1}, \mathfrak{P}_\infty$, während sonst je zwei übereinanderliegende Punkte denselben Buchstaben, das einemal jedoch überstrichen, erhalten, z. B. $\mathfrak{A}$ und $\overline{\mathfrak{A}}$. Letztere heißen *konjugiert*, die Verzweigungspunkte hiernach *sich selbst konjugiert*.

Ist $\xi = X + Y\sqrt{\Delta}$ eine beliebige Funktion des Körpers, so entspricht derselben in eindeutiger Weise ein *„Divisor der Ordnung Null"*

---

*) Vergl. hierzu *Hensel* u. *Landsberg*, „Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln usw.", (insbes. 1. und 10. Vorlesung).

$$(2.) \qquad \mathfrak{Q} = \frac{\mathfrak{A}_1^{\lambda_1}\mathfrak{A}_2^{\lambda_2}\cdots\mathfrak{A}_h^{\lambda_h}}{\mathfrak{B}_1^{\mu_1}\mathfrak{B}_2^{\mu_2}\cdots\mathfrak{B}_k^{\mu_k}},$$

$$(3.) \qquad (\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_h)-(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_k)=0,$$

worin die $\mathfrak{A}_i$ bezw. $\mathfrak{B}_i$ die Lage der Nullstellen bzw. der Pole von ξ auf R_z und die λ_i bezw. μ_i die Multiplizitäten derselben angeben*). Die Zahl $\lambda = \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_h$ heißt der *Grad*, die Differenz (3.) die *Ordnung* des Divisors. Umgekehrt ist durch Angabe des Divisors $\mathfrak{Q}$ die Funktion ξ bis auf eine willkürliche multiplikative Konstante völlig bestimmt; wir denken uns dieselbe ein für allemal so normiert, daß dem Divisor $\mathfrak{Q}$ diejenige unter den Funktionen konst. $\times\ \xi$ zugeordnet werden soll, in deren Entwicklung an der Stelle $\mathfrak{P}_\infty$ der Koeffizient des niedrigsten Gliedes gleich 1 ist. Dadurch wird das Entsprechen zwischen Funktion und Divisor ein ein-eindeutiges, was in der Gleichung $\mathfrak{Q} = \xi$ seinen Ausdruck findet**).

Wir beschäftigen uns im folgenden mit beliebigen Divisoren der Ordnung Null. Mit denselben lassen sich die Operationen der Multiplikation und Division ausführen wie mit den rationalen Zahlen [exkl. Null], und sie reproduzieren sich dabei. Da wir es ausschließlich mit Divisoren der *Ordnung Null* zu tun haben, sprechen wir der Einfachheit halber von Divisoren schlechtweg.

Nicht jedem Divisor braucht eine Funktion ξ des Körpers zu entsprechen; ist das aber der Fall, so heißt er ein *algebraischer*, und wenn ξ insbesondere rational ist, ein *rationaler* Divisor ($\xi = X = \Re$)***). Aufgefaßt als Funktion der schlichten Ebene entspricht X aber — unter derselben Festsetzung über die multiplikative Konstante wie oben — in umkehrbar eindeutiger Weise einem Divisor der Form

$$\mathfrak{r} = \frac{\mathfrak{r}_1^{\varrho_1}\mathfrak{r}_2^{\varrho_2}\cdots\mathfrak{r}_h^{\varrho_h}}{\mathfrak{p}_1^{\pi_1}\mathfrak{p}_2^{\pi_2}\cdots\mathfrak{p}_k^{\pi_k}}, \qquad (\varrho_1+\varrho_2+\cdots+\varrho_h)-(\pi_1+\pi_2+\cdots+\pi_k)=0,$$

wenn $\mathfrak{r}_i, \mathfrak{p}_i$ die Nullstellen bezw. Pole von X in der z-Ebene und ϱ_i, π_i die bez. Multiplizitäten derselben sind, so daß wir für die rationale Funktion X die doppelte Darstellung

---

*) Es wird kein Mißverständnis hervorrufen, wenn wir die großen deutschen Buchstaben auch als *Abkürzungen* für einen Divisor benutzen.

**) S. *Hensel-Landsberg*, a. a. O., S. 153.

***) Hierin weiche ich in der Terminologie von „*Hensel-Landsberg*“ ab.

$$X = \Re = \mathfrak{r}$$

haben, je nachdem sie als Funktion der *Riemann*schen Fläche oder der schlichten Ebene aufgefaßt wird.

§ 2. Ganze Divisoren*).

Will man eine der gewöhnlichen Arithmetik analoge Arithmetik für die Divisoren aufbauen, so muß man einen Punkt der *Riemann*schen Fläche, und zwar den unendlich fernen Punkt auszeichnen und als Elemente nicht Prim*punkte*, sondern *Primdivisoren nullter Ordnung* einführen.

Wir bezeichnen einen beliebigen Divisor $\mathfrak{Q}$ als *ganz*, wenn im Nenner nur der Punkt $\mathfrak{P}_\infty$ vorkommt, wenn er also die Form hat

$$\mathfrak{Q} = \frac{\mathfrak{A}_1^{\lambda_1}\mathfrak{A}_2^{\lambda_2}\cdots\mathfrak{A}_h^{\lambda_h}}{\mathfrak{P}_\infty^{\lambda}}, \qquad \lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_h.$$

Jeder andere Divisor heißt im Gegensatz hierzu *gebrochen*. Einer ganzen Funktion des Körpers entspricht hiernach ein ganzer algebraischer Divisor. Einen ganzen Divisor $\mathfrak{Q}$ nennen wir durch einen anderen $\mathfrak{Q}_1$ *teilbar*, wenn es einen ganzen Divisor $\mathfrak{Q}_2$ gibt, derart, daß $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_1 \cdot \mathfrak{Q}_2$. Gemäß dieser Definition gelten für die Teilbarkeit der ganzen Divisoren offensichtlich ganz dieselben Gesetze wie für die natürlichen Zahlen. Die Rolle der Einheit spielt der (den Konstanten zugeordnete) Divisor $\mathfrak{Q} = 1$, die Rolle der Primfaktoren (Primdivisoren) die ganzen Divisoren ersten Grades, z. B. $\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{P}_\infty}, \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{P}_\infty}, \cdots \frac{\mathfrak{A}_h}{\mathfrak{P}_\infty}$ im obigen Falle. Größter gemeinschaftlicher Teiler und kleinstes gemeinschaftliches Vielfache zweier ganzer Divisoren $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ sind ebenso zu definieren und aus den in ihre Primfaktoren zerlegten $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ unmittelbar abzulesen wie bei den (in ihre Primfaktoren zerlegten) natürlichen Zahlen.

Ersetzt man in einem ganzen (oder gebrochenen) Divisor $\mathfrak{Q}$ jeden Punkt durch den konjugierten, so erhält man den *konjugierten* Divisor $\bar{\mathfrak{Q}}$; ihr Produkt — die Norm von $\mathfrak{Q}$ —

$$\mathfrak{Q} \cdot \bar{\mathfrak{Q}} = N(\mathfrak{Q})$$

ist ein rationaler Divisor. Die Divisoren $\mathfrak{Q} = 1$, $\frac{\mathfrak{E}_i}{\mathfrak{P}_\infty}$ $(i = 1, 2, \ldots 2p+1)$,

*) Der Ausdruck wird hier in anderem Sinne gebraucht als bei „*Hensel-Landsberg*“, S. 148.

sowie jeder rationale Divisor sind hiernach mit ihrem konjugierten identisch oder „*sich selbst konjugiert.*“

Sehr wichtig für das folgende ist der Begriff des primären Divisors. Ein ganzer Divisor $\mathfrak{Q}$ wird nämlich als *primär* bezeichnet, wenn er durch keinen rationalen Divisor teilbar ist. Offenbar ist dazu notwendig und hinreichend, daß der Zähler von $\mathfrak{Q}$ nicht zwei konjugierte Punkte gleichzeitig enthält, also insbesondere einen der Punkte $\mathfrak{E}_i$ nicht in einer höhern als der ersten Potenz. Es gilt (wie unmittelbar folgt)

Bemerkung 1): *Die Norm eines primären Divisors $\mathfrak{Q}$ ist die rationale Funktion niedrigsten Grades, welche durch $\mathfrak{Q}$ teilbar ist,*

und Bemerkung 2): *Ein algebraischer Divisor $\mathfrak{Q} = \xi = A + B\sqrt{\Delta}$ ist dann und nur dann primär, wenn A und B keinen gemeinsamen rationalen Teiler haben.*

Der zweite Teil der Behauptung versteht sich von selbst; um den ersten zu beweisen, nehmen wir an, $\mathfrak{Q}$ hätte den rationalen Teiler $\mathfrak{r}$. Da B nicht durch $\mathfrak{r}$ teilbar sein kann — sonst müßte auch A dadurch teilbar sein, was gegen die Voraussetzung verstößt — muß es mindestens einen Primfaktor von $\mathfrak{r}$ in einer niedrigeren Potenz enthalten als $\mathfrak{r}$ selbst, so daß $\mathfrak{r}$ etwa den Faktor hat $\frac{\mathfrak{r}_1^{\lambda}}{\mathfrak{p}_\infty^{\lambda}} = \frac{\mathfrak{R}_1^{\lambda}\overline{\mathfrak{R}}_1^{\lambda}}{\mathfrak{P}_\infty^{2\lambda}}$, B hingegen nur den Faktor $\frac{\mathfrak{r}_1^{\lambda-1}}{\mathfrak{p}_\infty^{\lambda-1}}$. Es sei zunächst $\mathfrak{R}_1 \neq \mathfrak{E}_i$ $(i = 1, 2, \ldots 2p+1)$. Dann wird die Entwicklung von $A, B, \sqrt{\Delta}$ an der Stelle $\mathfrak{R}_1 (z = r)$ so lauten:

$$A = a_0 + a_1(z-r) + \cdots + a_{\lambda-1}(z-r)^{\lambda-1} + ((z-r))^{\lambda},$$
$$B = \qquad\qquad b_{\lambda-1}(z-r)^{\lambda-1} + ((z-r))^{\lambda},\ b_{\lambda-1} \neq 0,$$
$$\sqrt{\Delta} = d_0 + d_1(z-r) + \cdots + d_{\lambda-1}(z-r)^{\lambda-1} + ((z-r))^{\lambda},\ d_0 \neq 0,$$

also die Entwicklung von ξ an der Stelle $\mathfrak{R}_1$:

$$\xi = A + B\sqrt{\Delta} = a_0 + a_1(z-r) + \cdots + (a_{\lambda-1} + d_0 b_{\lambda-1})(z-r)^{\lambda-1} + ((z-r))^{\lambda},$$

an der Stelle $\overline{\mathfrak{R}}_1$ hingegen:

$$\xi = \qquad a_0 + a_1(z-r) + \cdots + (a_{\lambda-1} - d_0 b_{\lambda-1})(z-r)^{\lambda-1} + ((z-r))^{\lambda}.$$

Es muß also $a_0 = a_1 = \cdots = a_{\lambda-2} = 0$,

$$a_{\lambda-1} + d_0 b_{\lambda-1} = 0,$$
$$a_{\lambda-1} - d_0 b_{\lambda-1} = 0$$

sein, woraus folgt $a_{\lambda-1} = b_{\lambda-1} = 0$, was einen Widerspruch ergibt. Ist hingegen z. B. $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{Q}$ durch $\frac{\mathfrak{e}_1^{\varepsilon}}{\mathfrak{p}_\infty^{\varepsilon}} = \frac{\mathfrak{E}_1^{2\varepsilon}}{\mathfrak{P}^{2\varepsilon}}$ teilbar, während B nur den

Faktor $\frac{\mathfrak{e}_1^{\varepsilon-1}}{\mathfrak{p}_\infty^{\varepsilon-1}}$ hat, dann ist $B\sqrt{\Delta}$ durch $\frac{\mathfrak{G}_1^{2(\varepsilon-1)+1}}{\mathfrak{P}_\infty^{2\varepsilon-1}}$ teilbar, daher auch A und letzteres als rationale Funktion gleich durch $\frac{\mathfrak{G}_1^{2\varepsilon}}{\mathfrak{P}_\infty^{2\varepsilon}}$ teilbar, woraus dasselbe für B folgen würde.

II. Von den Kongruenzen.

§ 3. Definitionen; vollständiges Restsystem.

Zwei Funktionen des Körpers α_1, α_2 heißen kongruent nach dem Modul $\mathfrak{M}$ ($\alpha_1 \equiv \alpha_2 \bmod \mathfrak{M}$), wo $\mathfrak{M}$ ein beliebiger Divisor*) sein kann, wenn ihre Differenz durch $\mathfrak{M}$ teilbar ist. Wie bei den Zahlen folgt hieraus, daß man Kongruenzen zwischen Funktionen addieren, subtrahieren und multiplizieren darf. — Zwei *algebraische Divisoren* $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ nennen wir hingegen *kongruent* nach dem Modul $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{Q}_1 \equiv \mathfrak{Q}_2 \bmod \mathfrak{M}$), wenn sich die zugehörigen Funktionen so mit von Null verschiedenen Konstanten multiplizieren lassen, daß ihre Differenz durch $\mathfrak{M}$ teilbar wird.

Da offenbar ein algebraischer Divisor sich selbst kongruent ist und zwei Divisoren, welche demselben dritten kongruent sind, auch untereinander es sind, so lassen sich die algebraischen Divisoren in *Klassen* einteilen derart, daß kongruente Divisoren in dieselbe, nicht kongruente in verschiedene Klassen kommen. Alle Divisoren einer Klasse haben offenbar denselben größten gemeinschaftlichen Teiler mit dem Modul $\mathfrak{M}$, so daß wir von dem *Teiler einer Klasse* sprechen können.

Nach dem Modul $\mathfrak{M} = 1$ sind alle Divisoren einander kongruent. Es sei $\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{P}_\infty}$ ein beliebiger Divisor ersten Grades; dann bilden die nicht durch $\mathfrak{M}$ teilbaren Divisoren eine einzige Klasse, insofern sie alle dem Divisor $\mathfrak{Q} = 1$ kongruent sind. Entspricht der Stelle $\mathfrak{A}$ der Wert $z = \alpha$, so ist eine beliebige durch $\mathfrak{M}$ nicht teilbare rationale Funktion R wegen $R = R_1(z-\alpha) + r$ kongruent einer von Null verschiedenen Konstanten, während $\sqrt{\Delta} \equiv 0$ ist, wenn $\mathfrak{A} = \mathfrak{E}_i$, bzw. $\sqrt{\Delta} \equiv$ dem konstanten Glied in der Entwicklung an der Stelle $\mathfrak{A}$, wenn $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{E}_i$ ($i = 1, 2, \ldots 2p+1$). Also ist jede durch $\mathfrak{M}$ nicht teilbare Funktion $A + B\sqrt{\Delta}$ kongruent einer von Null

*) Wo nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt ist, handelt es sich hier und im folgenden immer um *ganze* Divisoren.

verschiedenen Konstanten; d. h. aber jeder algebraische Divisor ist kongruent $\mathfrak{Q} = 1$.

Es sei jetzt

$$(4.) \qquad \mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{A}^\lambda \mathfrak{B}^\mu \cdots \mathfrak{C}^\nu}{\mathfrak{P}_\infty^\varrho}, \qquad (\lambda + \mu + \cdots + \nu = \varrho)$$

ein beliebiger primärer Divisor vom Grad ϱ. Dann gilt

Satz 1: *In jeder durch $\mathfrak{M}$ nicht teilbaren Divisorenklasse gibt es einen und nur einen rationalen Divisor höchstens vom Grad $\varrho - 1$:* $\mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \cdots \mathfrak{a}_{\varrho-1}}{\mathfrak{P}_\infty^{\varrho-1}}$, *den wir den reduzierten Divisor der Klasse nennen.*

Wenn daher die Punkte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_{\varrho-1}$ die ganze Ebene überstreichen, erhalten wir ein *vollständiges Restsystem* für alle durch $\mathfrak{M}$ nicht teilbaren Divisoren nach dem Modul $\mathfrak{M}$. Daß es nur einen reduzierten Divisor in jeder Klasse gibt, folgt so: Angenommen, es gäbe zwei verschiedene $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2$, so daß $\mathfrak{q}_1 \equiv \mathfrak{q}_2 \bmod \mathfrak{M}$. Dann müßte, wenn q_1, q_2 die zugeordneten Funktionen, c_1, c_2 zwei geeignete von Null verschiedene Konstanten sind, $c_1 q_1 - c_2 q_2$ durch $\mathfrak{M}$ und daher auch durch $N(\mathfrak{M})$ teilbar, also, da $c_1 q_1 - c_2 q_2$ höchstens vom Grad $\varrho - 1$, identisch Null sein, d. h. aber $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2$ gegen die Annahme. Jede durch $\mathfrak{M}$ nicht teilbare rationale Funktion R ist ferner wegen $R = R_1 \cdot N(\mathfrak{M}) + R_2$ einer von Null verschiedenen rationalen Funktion R_2 höchstens vom Grad $\varrho - 1$ kongruent; es bleibt daher zum Beweise des Satzes 1 nur noch zu zeigen übrig, daß dasselbe auch für $\sqrt{\Delta}$ gilt. Dazu benötigen wir die Lösung folgender Hilfsaufgabe.

§ 4. Allgemeine Interpolationsaufgabe.

Es ist eine ganze rationale Funktion zu bestimmen, welche an den Stellen $a, b, \ldots c$ nebst ihren Ableitungen beziehlich bis zur $(\lambda - 1)$-ten, $(\mu - 1)$-ten, $\ldots (\nu - 1)$-ten Ordnung gegebene Werte annimmt; dabei sollen die einer Stelle entsprechenden Werte nicht sämtlich Null sein und der Grad der rationalen Funktion höchstens $\varrho - 1$, wenn $\lambda + \mu + \cdots + \nu = \varrho$ ist. Wir setzen

$$f = (z-a)^\lambda (z-b)^\mu \cdots (z-c)^\nu,$$

$$(5.) \quad R_{\varrho-1} = \frac{f}{(z-a)^\lambda} A(z) + \frac{f}{(z-b)^\mu} B(z) + \cdots + \frac{f}{(z-c)^\nu} C(z).$$

Dadurch reduziert sich das Problem auf die folgende Aufgabe: Die rationale Funktion $A(z) = a_0 + a_1 (z-a) + \cdots + a_{\lambda-1} (z-a)^{\lambda-1}$ höchstens vom Grad $\lambda - 1$ so zu bestimmen, daß

$$(z-b)^{\mu}\cdots(z-c)^{\nu}\,A(z) = F_a \cdot A(z)$$

an der Stelle $z=a$ nebst den Ableitungen bis zur $(\lambda-1)$-ten Ordnung gegebene Werte $A_0, A_1, \ldots A_{\lambda-1}$ annimmt. Analog für die übrigen Stellen. Es soll also

(6.) $$(F_a \cdot A)_{z=a} = A_0,\ (F_a \cdot A)^{(1)}_{z=a} = A_1,\ \ldots\ (F_a \cdot A)^{(\lambda-1)}_{z=a} = A_{\lambda-1}$$

sein; das sind aber λ lineare Gleichungen für die λ Unbekannten $a_0, a_1, \ldots a_{\lambda-1}$. Das homogene Problem hat keine (von Null verschiedene) Lösung, denn dann wäre $F_a \cdot A$ durch $(z-a)^{\lambda}$ teilbar, während F_a zu $z-a$ teilerfremd und A nur vom Grad $\lambda-1$ ist; also hat das inhomogene Problem immer eine und nur eine Lösung. Damit ist $R_{\varrho-1}$ gegeben*).

Auch folgende allgemeinere Aufgabe können wir jetzt lösen. Gegeben ist eine durch $z-a, \ldots z-b, z-c$ nicht teilbare ganze rationale Funktion Q. $R_{\varrho-1}$ sei jetzt so zu bestimmen als rationale Funktion höchstens vom Grad $\varrho-1$, daß $Q \cdot R_{\varrho-1}$ denselben Bedingungen genügt wie oben $R_{\varrho-1}$ selbst. Indem wir für $R_{\varrho-1}$ genau denselben Ansatz (5.) wie oben machen, ist jetzt nur z. B. $A(z)$ so zu bestimmen, daß $Q \cdot F_a \cdot A$ denselben Bedingungen (6.) genügt wie oben $F_a \cdot A$, was aus dem gleichen Grunde möglich ist.

Um jetzt die Anwendung auf § 3 zu machen, schreiben wir den primären Divisor (4.) in der Form $\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}_2 \cdots \mathfrak{E}_i}{\mathfrak{P}_\infty^i} \cdot \mathfrak{M}' = \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{M}'$, wo $\mathfrak{M}' = \frac{\mathfrak{A}'^{\lambda'} \mathfrak{B}'^{\mu'} \cdots}{\mathfrak{P}_\infty^{\varrho-i}}$ jetzt keinen (endlichen) Verzweigungspunkt mehr enthält, und setzen

$$R_{\varrho-1} = (z-e_1)(z-e_2)\cdots(z-e_i) \cdot R_{\varrho-1-i} = Q_i R_{\varrho-1-i},$$

wodurch $R_{\varrho-1} - \sqrt{\Delta}$ durch $\mathfrak{E}$ teilbar wird. Damit es überdies durch $\mathfrak{M}'$ teilbar werde, ist dann $R_{\varrho-1-i}$ so zu bestimmen, daß die Entwicklungskoeffizienten von $Q_i \cdot R_{\varrho-1-i}$ an den Stellen $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \ldots (z = a', b', \ldots)$ gleich denen von $\sqrt{\Delta}$ bzw. bis zur $(\lambda'-1)$-ten, $(\mu'-1)$-ten, ... Ordnung werden. Diese Aufgabe ist aber nach dem obigen immer auf eine und nur eine Weise durch eine rationale Funktion $R_{\varrho-1-i}$ höchstens vom Grad $\varrho-1-i$ lösbar.

§ 5. Die Gruppe der Restklassen.

Hiermit ist also gezeigt, daß es in jeder Restklasse nach dem primären Modul $\mathfrak{M}$ (4.) einen und nur einen reduzierten rationalen Divisor

*) S. auch die Lösung dieser Aufgabe bei *Ch. Hermite*; „Sur la formule d'interpolation de Lagrange", Oeuvres, Paris 1912, t. III. p. 432 = dieses Journal 84 (1878), S. 70. Die obige Methode ist für den vorliegenden Zweck wohl die einfachste.

$\mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \cdots \mathfrak{a}_{\varrho-1}}{\mathfrak{p}_\infty^{\varrho-1}}$ höchstens vom Grad $\varrho - 1$ gibt. Sind darin $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_{\varrho-1} \neq \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots \mathfrak{c}$, d. i. den den Punkten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots \mathfrak{C}$ entsprechenden Punkten der schlichten Ebene, so bilden sämtliche derartige Divisoren ein *vollständiges reduziertes Restsystem für die zu $\mathfrak{M}$ teilerfremden Klassen;* von letzteren gilt

Satz 2: *Die zu einem primären Modul $\mathfrak{M}$ teilerfremden Divisorenklassen bilden bei der Komposition durch Multiplikation eine kontinuierlich unendliche Abelsche Gruppe.*

Die Dimension dieser Gruppe ist $\infty^{2(\varrho-1)}$, wenn ϱ der Grad von $\mathfrak{M}$ ist. — Denn 1. ist das Produkt zweier zu $\mathfrak{M}$ teilerfremden Klassen wieder eine zu $\mathfrak{M}$ teilerfremde Klasse. 2. ist die Multiplikation offenbar assoziativ und kommutativ. 3. ist sie einpaarig, d. h. wenn Q_1, Q_2, Q drei beliebige Klassen sind, so folgt aus $Q_1 Q = Q_2 Q$ immer $Q_1 = Q_2$. Denn sind $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}$ die reduzierten Divisoren der betr. Klassen, q_1, q_2, q die zugeordneten Funktionen, so folgt aus $\mathfrak{q}_1 \cdot \mathfrak{q} \equiv \mathfrak{q}_2 \cdot \mathfrak{q} \bmod \mathfrak{M}$, daß es zwei von Null verschiedene Konstanten c_1, c_2 gibt, derart, daß $c_1 q_1 q - c_2 q_2 q = q(c_1 q_1 - c_2 q_2)$ durch $\mathfrak{M}$ und daher auch $N(\mathfrak{M})$ teilbar ist. Hieraus ergibt sich aber $c_1 q_1 - c_2 q_2 = 0$ oder $q_1 = q_2$; w. z. b. w. 3ª. Der Divisor $\mathfrak{q} = 1$ läßt bei der Multiplikation jedes Element ungeändert; die zu demselben kongruenten Divisoren bilden die Haupt- oder Einheitsklasse E. 4. Zu jeder Klasse Q gibt es eine und nur eine reziproke Q^{-1}, für welche $Q \cdot Q^{-1} = E$ wird. Sei $\mathfrak{q}$ wieder der reduzierte Divisor von Q, q die zugeordnete Funktion, so können wir nach § 4 die rationale Funktion X höchstens vom Grad $\varrho - 1$ so bestimmen, daß

$$q \cdot X - 1 \quad \text{durch } \mathfrak{M} \text{ teilbar}$$

wird. D. h. aber, wenn $\mathfrak{q}^{-1}$ der X entsprechende Divisor ist, $\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{q}^{-1} \equiv 1 \bmod \mathfrak{M}$, womit die Existenz einer reziproken Klasse nachgewiesen ist. Daß es nur eine geben kann, folgt schon aus 3.

Die nähere Untersuchung dieser Gruppe, d. i. im wesentlichen die Bestimmung der n-seitigen Klassen, welche auf recht interessante geometrische Lageverhältnisse führt, überlassen wir der Kürze wegen dem Leser.

§ 6. Lineare Kongruenzen.

Wir haben bisher nur Kongruenzen nach einem *primären* Modul betrachtet. Aus der in § 5 nachgewiesenen Gruppeneigenschaft würde für

einen solchen Modul $\mathfrak{M}$ jetzt leicht die Auflösbarkeit der linearen Kongruenz

(7.) $$\alpha\xi \equiv \gamma \mod \mathfrak{M}$$

folgen, wenn α, γ gegebene Funktionen des Körpers sind und γ durch den größten gemeinschaftlichen Teiler $\mathfrak{D}$ von α und $\mathfrak{M}$ teilbar ist. Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, die Kongruenz (7.) unter denselben Voraussetzungen durch eine ganze Funktion ξ des Körpers zu lösen, wenn $\mathfrak{M}$ ein ganz *beliebiger Divisor* ist.

Sei $\mathfrak{M}$ in seine verschiedenen Primfaktoren zerlegt

(8.) $$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{A}_1^{\lambda_1}\mathfrak{A}_2^{\lambda_2}\cdots\mathfrak{A}_h^{\lambda_h}}{\mathfrak{P}_\infty^{\lambda}} = \frac{\mathfrak{A}_i^{\lambda_i}}{\mathfrak{P}_\infty^{\lambda_i}}\cdot\mathfrak{B}_i,\quad \lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_h, \qquad (i = 1, 2, \ldots h)$$

und setzen wir

(9.) $$\xi = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \cdots + \beta_h\xi_h,$$

wo β_i eine zu $\frac{\mathfrak{A}_i}{\mathfrak{P}_\infty}$ teilerfremde, durch $\mathfrak{B}_i$ teilbare Funktion und ξ_i eine Wurzel der Kongruenz

(10.) $$\alpha\beta_i\cdot\xi_i \equiv \gamma \mod \frac{\mathfrak{A}_i^{\lambda_i}}{\mathfrak{P}_\infty^{\lambda_i}}$$

ist. Es wird dann

$$\alpha\xi - \gamma \equiv \alpha\beta_i\xi_i - \gamma \equiv 0 \mod \frac{\mathfrak{A}_i^{\lambda_i}}{\mathfrak{P}_\infty^{\lambda_i}} \qquad (i = 1, 2, \ldots h)$$

und daher ξ eine Lösung von (7.).

Kommt $\bar{\mathfrak{A}}_i$ nicht in $\mathfrak{B}_i$ vor, so wählen wir einfach $\beta_i = N(\mathfrak{B}_i)$; ist aber $\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{A}_i^{\lambda_i}\bar{\mathfrak{A}}_i^{\bar{\lambda}_i}}{\mathfrak{P}_\infty^{\lambda_i+\bar{\lambda}_i}}\cdot\tilde{\mathfrak{B}}_i$ und d_{0i} das konstante Glied in der Entwicklung von $\sqrt{\Delta}$ an der Stelle $\bar{\mathfrak{A}}_i$, so genügt die Funktion $\beta_i = N(\tilde{\mathfrak{B}}_i)\cdot(\sqrt{\Delta} - d_{0i})^{\bar{\lambda}_i}$ obiger Bedingung.

Was ferner die Kongruenz (10.) anlangt, so gibt $\xi_i = 0$ eine Lösung derselben, wenn α durch $\frac{\mathfrak{A}_i^{\lambda_i}}{\mathfrak{P}_\infty^{\lambda_i}}$ teilbar ist. Ist aber α nur durch $\frac{\mathfrak{A}_i^{\lambda_i-\tau_i}}{\mathfrak{P}_\infty^{\lambda_i-\tau_i}} = \frac{\mathfrak{A}_i^{\varrho_i}}{\mathfrak{P}_\infty^{\varrho_i}}$ $(0 \leqq \varrho_i < \lambda_i)$ teilbar, so haben wir zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $\mathfrak{A}_i$ von den Verzweigungspunkten verschieden ist oder nicht. Im ersten Fall läßt sich ξ_i auf eine und nur eine Weise als ganze rationale Funktion höchstens vom Grad $\tau_i - 1$

$$\xi_i = A_{\tau_i - 1}$$

so bestimmen, daß der Kongruenz (10.) genügt wird, wie man leicht er

kennt, wenn man die Entwicklungen von $\alpha\beta_i, \gamma, \xi_i$ an der Stelle $\mathfrak{A}_i$ einführt und beide Seiten von (10.) miteinander vergleicht.

Im zweiten Fall hingegen, wenn etwa $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{E}_1$, hat man die betreffenden Funktionen nach Potenzen von $\sqrt{z - e_1} = t$ zu entwickeln und findet durch Vergleichung der linken und rechten Seite von (10.), daß sich ξ auf eine und nur eine Weise von der Form bestimmen läßt

$$\xi = A_{\frac{\tau_i - 2}{2}} + B_{\frac{\tau_i - 2}{2}} \cdot \sqrt{\Delta}, \text{ wenn } \tau_i \text{ gerade},$$

$$\xi = A_{\frac{\tau_i - 1}{2}} + B_{\frac{\tau_i - 3}{2}} \cdot \sqrt{\Delta}, \text{ wenn } \tau_i \text{ ungerade},$$

wo die Indizes wieder die Grade der rationalen Funktion A, B angeben.

Ist hiermit die Auflösbarkeit der Kongruenz (7.) dargetan, so folgt, daß der *Modul*

$$\{\alpha, \beta\} = \alpha t_1 + \beta t_2,$$

wo t_1, t_2 die ganzen Funktionen des Körpers durchlaufen, identisch ist mit den (algebraischen) Vielfachen des größten gemeinschaftlichen Teilers $\mathfrak{D}$ von α und β. Dasselbe folgt sofort für einen mehrgliedrigen Modul $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n\}$, woraus Satz 3 resultiert*):

Satz 3: *Es bilden nicht nur die (algebraischen) Vielfachen eines ganzen Divisors nullter Ordnung ein Ideal (im Dedekindschen Sinne), sondern auch umgekehrt entspricht jedem Ideal (nach Dedekinds Definition) ein ganzer Divisor der nullten Ordnung.*

III. Die Divisorenklassen nullter Ordnung.

§ 7. Reduzierte Divisoren.

Gegenstand unserer Betrachtung sind wieder die ganzen und gebrochenen Divisoren der Ordnung Null. Unter diesen sind besonders die algebraischen Divisoren ausgezeichnet, welche bei der Komposition durch Multiplikation offenbar eine *Abel*sche Gruppe bilden. Zwei beliebige Divisoren heißen alsdann *äquivalent*, wenn ihr Quotient ein algebraischer Divisor ist**). Äquivalente Divisoren werden in eine *Klasse* vereinigt. Die algebraischen Divisoren bilden jetzt die *Hauptklasse E*, während sich die anderen auf die *Nebenklassen* verteilen.

---

*) S. *H. Weber*, Algebra II, 2. Aufl., S. 620—623.

**) S. „*Hensel-Landsberg*“, 17. Vorlesung.

Zieht man bloß die *ganzen* Divisoren in Betracht, so erhält man *dieselbe* Klassenmannigfaltigkeit. Denn einerseits kommen alle von den ganzen Divisoren gebildeten Klassen natürlich unter den früheren vor; andererseits kann aber auch keine Klasse fehlen, denn unter den mit einem beliebigen Divisor $\mathfrak{Q} = \frac{\mathfrak{Q}_1}{\mathfrak{Q}_2}$ äquivalenten gibt es stets auch ganze Divisoren, z. B. $\mathfrak{Q} \cdot N\left(\frac{\mathfrak{Q}_2}{\mathfrak{P}_\infty^h}\right) = \frac{\mathfrak{Q}_1 \bar{\mathfrak{Q}}_2}{\mathfrak{P}_\infty^{2h}}$, wenn h der Grad von $\mathfrak{Q}$ ist.

Jeder ganze Divisor $\mathfrak{Q}_1$ kann durch Multiplikation mit einem anderen $\mathfrak{Q}_2$ (z. B. seinem konjugierten) in einen *rationalen* Divisor verwandelt werden; dabei hängt der Grad von $\mathfrak{Q}_2$ von dem Grad von $\mathfrak{Q}_1$ ab und ist für einen primären Divisor $\mathfrak{Q}_1$ mindestens gleich dem Grad von $\mathfrak{Q}_1$ selbst (Bemerkung 1). Dagegen gilt

Satz 4: *Jeder ganze Divisor $\mathfrak{Q}$ kann durch Multiplikation mit einem anderen, dessen Grad höchstens p beträgt, in einen Divisor der Hauptklasse verwandelt werden, dagegen nicht immer durch Multiplikation mit einem ganzen Divisor niedrigeren Grades.*

Um den letzten Teil des Satzes zu erhärten, nehmen wir an, der primäre Divisor $\mathfrak{Q}_1$ vom Grad p lasse sich durch Multiplikation mit $\mathfrak{Q}_2$, dessen Grad höchstens $p-1$ sei, in einen algebraischen verwandeln, also

$$\mathfrak{Q}_1 \cdot \mathfrak{Q}_2 = \zeta = A + B\sqrt{\Delta}.$$

Da ζ höchstens vom Grad $2p-1$ ist, muß $B = 0$ sein — da sich der Koeffizient der niedrigsten Potenz in der Entwicklung von $B\sqrt{\Delta}$ an der Stelle $\mathfrak{P}_\infty$ nicht gegen einen von A wegheben kann. Also wäre $\mathfrak{Q}_1 \cdot \mathfrak{Q}_2$ rational, was dem obigen widerspricht.

Nun zum Beweise des ersten Teiles, wobei $\mathfrak{Q}$ offenbar als primär vorausgesetzt werden kann*)! Für die Divisoren der Grade $1, 2, \ldots p$ ist der Satz offenbar richtig (man braucht sie bloß mit ihren konjugierten zu multiplizieren). Ist $\mathfrak{Q}$ aber vom Grad $p+1$, so läßt sich nach § 4 die ganze rationale Funktion R höchstens vom Grad p so bestimmen, daß $R + \sqrt{\Delta} = \zeta$ durch $\mathfrak{Q}$ teilbar, also $\zeta = \mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{Q}'$ wird, wo $\mathfrak{Q}'$ höchstens vom Grad p sein kann. Im übrigen verläuft der Beweis mittels vollständiger Induktion genau analog wie in § 5 meiner oben genannten Arbeit**).

*) Er gilt dann eo ipso auch für nicht primäre Divisoren.

**) Über die quadratischen Formen usw.; s. S. 192, Anm. †).

Nennen wir einen ganzen Divisor, dessen Grad $= p$ ist, *reduziert*, so folgt unmittelbar

Satz 4[a]: *In jeder von E verschiedenen Divisorenklasse gibt es einen und nur einen reduzierten primären Divisor.*

Für die Hauptklasse werde $\mathfrak{Q} = 1$ als reduzierter Divisor gewählt. Daß es sonst nur einen gibt, zeigen wir so: angenommen, die beiden reduzierten primären Divisoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gehörten derselben Klasse an, dann müßte $\mathfrak{B} \cdot \bar{\mathfrak{A}} = \zeta = X + Y\sqrt{\Delta}$ und $Y = 0$ sein, da ζ höchstens vom Grad $2p$ ist. Daraus folgt aber $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$ (Bemerkung 1). Es kommt aber auch in jeder Klasse M wirklich ein derartiger Divisor vor; denn ist $\mathfrak{M}$ ein beliebiger ihr angehöriger Divisor und ist (nach Satz 4)

$$\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{P} = \zeta = \text{Funktion des Körpers,}$$

so ist wegen $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{P}} = \frac{\zeta}{N(\mathfrak{P})}$ in der Tat $\mathfrak{M}$ mit dem ganzen Divisor $\bar{\mathfrak{P}}$ höchstens vom Grad p äquivalent. Natürlich kann $\mathfrak{P}$ und damit $\bar{\mathfrak{P}}$ als primär angenommen werden.

Wir erhalten daher in den primären reduzierten Divisoren ein vollständiges Repräsentantensystem für die Divisorenklassen nullter Ordnung. Die Dimension dieser Klassenmannigfaltigkeit ist daher gleich ∞^{2p}*).

§ 8. Allgemeiner Lückensatz.

In den beiden Sätzen des vorigen Paragraphen liegt die *arithmetische Bedeutung des Geschlechtes* unserer *Riemann*schen Fläche; sie können geradezu als *Definition* für die Geschlechtszahl p verwendet werden**).

Untersuchen wir jetzt eine beliebige von E verschiedene Klasse M näher auf die in ihr vorkommenden Divisoren und besonders deren Gradzahlen. Es sei M die Klasse des reduzierten, primären Divisors

---

*) Vgl. hierzu meine oben zitierte Arbeit: „Zur arithmetischen Theorie usw." § 8. Wenn es da heißt (S. 36, oben), „und zwar erhält man so alle Klassen von Γ und jede von E verschiedene Klasse höchstens $(p-1)$-mal, E höchstens p-mal", so sind natürlich nur die *linear unabhängigen* Divisoren gemeint, wie aus § 7 deutlich hervorgeht.

**) Daß p eine Invariante des Körpers gegenüber birationalen Transformationen ist, würde sich aus der Tatsache ergeben (s. § 9), daß die Anzahl der zweiseitigen Klassen gleich 2^{2p} ist.

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \cdots \mathfrak{A}_l}{\mathfrak{P}_\infty^l} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{P}_\infty^l}, \qquad 1 \leqq l \leqq p.$$

Dann fehlen in M die ganzen Divisoren der Grade $1, 2, \ldots l-1$, während die Grade $l+2k$, $(k = 0, 1, 2, \ldots$ in inf.), sämtlich vorkommen, da mit $\mathfrak{M}$ auch $z^k\mathfrak{M}$ der Klasse M angehört. Es fehlen aber auch (falls $l < p$) die Grade

$$(11.) \qquad l + 1 + 2h, \quad \text{wo} \quad 0 \leqq h \leqq p - 1 - l.$$

Denn gehörte der Divisor $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}_\infty^{l+1+2h}}$ der Klasse M an, so müßte

$$\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}_\infty^{l+1+2h}} \cdot \frac{\overline{\mathfrak{A}}}{\mathfrak{P}_\infty^l} = \zeta = A + B\sqrt{\Delta}$$

sein, und da wegen (11.) $2(l+h)+1 \leqq 2p-1$, folgte $B = 0$; eine rationale Funktion $\zeta = A$ von ungeradem Grad $2(l+h)+1$ gibt es aber nicht.

Außer den bereits angeführten fehlt aber keine weitere Gradzahl; dazu genügt es offenbar, zu zeigen, daß die Gradzahl $l + 1 + 2(p-l) = 2p - l + 1$ stets vorkommt. Nach § 4 können wir aber die Kongruenz

$$R \equiv \sqrt{\Delta} \mod \frac{\overline{\mathfrak{A}}}{\mathfrak{P}_\infty^l}$$

durch eine rationale Funktion höchstens vom Grad $l-1$ (d. i. $\leqq p-1$) lösen; also wird

$$R - \sqrt{\Delta} = \frac{\overline{\mathfrak{A}}}{\mathfrak{P}_\infty^l} \cdot \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}_\infty^{2p+1-l}},$$

wo der zweite Faktor rechts M angehören muß. Aus all dem resultiert

Satz 5: *Ist M eine beliebige von E verschiedene Divisorenklasse nullter Ordnung und der in ihr enthaltene reduzierte primäre Divisor vom Grad l $(1 \leqq l \leqq p)$, so fehlen in M die ganzen Divisoren von den Graden $1, 2, \ldots l-1$ und $l+1+2h$, wo $0 \leqq h \leqq p-l-1$, und nur diese. Die Anzahl der fehlenden Gradzahlen ist daher immer gleich $p-1$**).

§ 9. Die zweiseitigen Klassen.

Die Divisorenklassen nullter Ordnung bilden bei Multiplikation eine kontinuierlich unendliche *Abel*sche Gruppe Γ. (Es sei daran erinnert, daß zwei ganze oder gebrochene Divisoren bzw. zwei Klassen *entgegengesetzt* oder *reziprok* heißen, wenn ihr Produkt gleich einem algebraischen Divisor

*) Vgl. meine frühere Arbeit: „Zur arithmetischen Theorie usw." § 9.

bzw. gleich E ist.) Wir beginnen das Studium dieser Gruppe damit, daß wir ihre nächst der Hauptklasse einfachsten Elemente, die *zweiseitigen Klassen*, betrachten. Es gilt zunächst der Satz:

Die zweiseitigen Klassen bilden eine Untergruppe vom Grade 2^{2p} und die den Divisoren $\frac{\mathfrak{E}_i}{\mathfrak{P}_\infty}$ $(i = 1, 2, \ldots 2p)$ entsprechenden Klassen E_i eine Basis derselben, insofern sich jede zweiseitige Klasse A auf eine und nur eine Weise in der Form darstellen läßt,

$$(12.) \qquad A = E_1^{\varepsilon_1} E_2^{\varepsilon_2} \cdots E_{2p}^{\varepsilon_{2p}} \qquad (\varepsilon_i = 0, 1).$$

Jede durch (12.) dargestellte Klasse ist offenbar zweiseitig; haben sämtliche ε_i den Wert 0 bzw. 1, so liefert (12.) die Klasse E bezw. E_{2p+1}. Es sei jetzt A eine beliebige (davon verschiedene) zweiseitige Klasse, $\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \cdots \mathfrak{A}_h}{\mathfrak{P}_\infty^h}$ $(1 \leqq h \leqq p)$ der reduzierte primäre Divisor innerhalb derselben. Soll dann

$$\mathfrak{A}^2 = \eta = X + Y\sqrt{\Delta}$$

sein, so folgt $Y = 0$ und daraus $\mathfrak{A}^2 = X = N(\mathfrak{A})$. Das ist aber nur dann möglich, wenn jeder Faktor im Zähler von $\mathfrak{A}$ mit einem der Punkte $\mathfrak{E}_k$ $(k = 1, 2, \ldots 2p+1)$ übereinstimmt, womit in der Tat dargetan ist, daß A in (12.) enthalten ist. Daß diese Darstellung überdies eindeutig ist, ergibt sich ohne weiteres daraus, daß eine Relation $E_1^{\alpha_1} E_2^{\alpha_2} \cdots E_{2p}^{\alpha_{2p}} = E$ offenbar nicht anders möglich ist, als daß sämtliche α gleich Null sind.

Den zweiseitigen Divisoren $\frac{\mathfrak{E}_k}{\mathfrak{P}_\infty}$ $(k = 1, 2, \ldots 2p+1)$ und deren Produkten können in umkehrbar eindeutiger Weise die Funktionen $\sqrt{z - e_k}$ und deren Produkte zugeordnet werden*). Der Divisorenklasse E_k entspricht dann die Funktionsklasse E_k, und es ist klar, daß durch die in der Form (12.) enthaltenen Klassen sämtliche *unverzweigte Wurzelfunktionen zweiter Ordnung*, d. h. sämtliche zu R_z relativ unverzweigte Funktionen, deren Quadrate im Körper vorkommen, erschöpft werden.

Mit der Gruppe der zweiseitigen Divisoren- oder Funktionsklassen ist die Gruppe ihrer Charaktere**)

$$(13.) \qquad \chi_B(A) = (-1)^{\varepsilon_1 \beta_1 + \varepsilon_2 \beta_2 + \cdots + \varepsilon_{2p} \beta_{2p}} \qquad (\varepsilon_i, \beta_i = 0, 1)$$

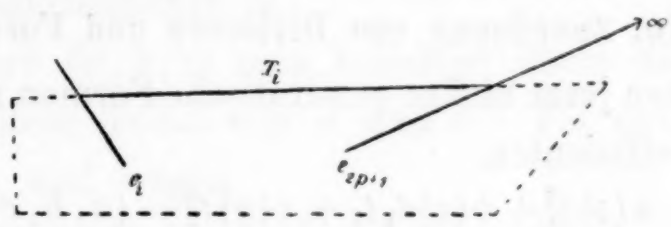
*) Das Vorzeichen bleibt willkürlich.

**) S. *H. Weber*, a. a. O. S. 50.

isomorph, und es erhebt sich die Frage nach der *Bedeutung dieser Charaktere*, worüber folgender Satz Aufschluß gibt:

Nimmt man aus jeder zweiseitigen Funktionsklasse einen Repräsentanten, so bilden die Faktoren, welche dieselben bei Durchlaufung eines beliebigen, auf R_z geschlossenen Weges annehmen, einen Charakter, und zwar werden *alle* zweiseitigen Charaktere auf diese Weise erzeugt.

Der erste Teil des Satzes steht fest*). Was den zweiten anlangt, so ist zunächst klar, daß auf einem Wege, der sich auf einen Punkt zusammenziehen läßt, der Hauptcharakter $\chi_0(A) = +1$ erzeugt wird; ferner auf einem die Punkte $z = e_i$ und $z = e_{2p+1}$ (und nur diese) einfach umschließenden Wege T_i — vgl. die schematische Figur —



hingegen der Charakter (12.)

$$\chi_i(A) = (-1)^{r_i}. \qquad (i=1, 2, \ldots 2p) \tag{14.}$$

Nun bilden die Charaktere (14.) einerseits eine Basis für die Gruppe (13.), andererseits wird auf dem aus zwei Wegen zusammengesetzten Wege offenbar das Produkt der zu den einzelnen Wegen gehörigen Charaktere erzeugt, womit denn auch der zweite Teil des Satzes bewiesen ist.

Unter dem aus zwei Wegen *zusammengesetzten* Wege verstehen wir hierbei den durch Nacheinanderdurchlaufung beider Wege entstehenden Weg**).

Nennen wir zwei geschlossene Wege, auf welchen derselbe zweiseitige Charakter erzeugt wird, *äquivalent*, so können wir darauf eine Einteilung der Wege in *Klassen* gründen, indem wir äquivalente Wege in eine Klasse vereinigen, während nicht äquivalente in verschiedene Klassen kommen. Verstehen wir unter dem Produkt zweier Wegklassen die Klasse desjenigen Weges, der durch Zusammensetzung zweier beliebigen Wege der beiden ersteren Klassen entsteht, so können wir nach dem obigen den Satz aussprechen:

---

*) Wegen des Beweises siehe meine Arbeit: „Über die quadratischen Formen mit rationalen Funktionen als Koeffizienten", § 8.

**) Haben die beiden Wege keinen Punkt gemeinsam, so können wir sie vorher durch eine einfache Kurve verbunden denken, was nichts ausmacht.

Satz 6: *Die zweiseitigen Wegklassen bilden bei der Komposition durch Multiplikation eine mit der Charakterengruppe der zweiseitigen Divisorenklassen isomorphe Gruppe.*

Als Basiselemente können die den obigen Wegen $T_i\,(i = 1, 2, \ldots 2p)$ entsprechenden Wegklassen gewählt werden.

Auf die zweiseitigen Klassen kann schließlich eine weitere Einteilung der Divisorenklassen nullter Ordnung gegründet werden, wofern man zwei Klassen, die durch Multiplikation mit einer zweiseitigen Klasse auseinander hervorgehen, äquivalent nennt und äquivalente Klassen in eine *Art* vereinigt*).

IV. Quadratische Formen.

§ 10. Zuordnung von Divisoren und Formen.

Wir betrachten jetzt binäre quadratische Formen mit ganzen rationalen Funktionen als Koeffizienten

$$a(z)\,t_1^2 + b(z)\,t_1 t_2 + c(z)\,t_2^2 = (a, b, c)$$

und gegebener Diskriminante

$$b^2 - 4ac = \Delta = (z - e_1)(z - e_2) \cdots (z - e_{2p+1}).$$

Die Resultate der vorhergehenden Abschnitte setzen uns in den Stand, für diese Formen eine der klassischen Theorie der quadratischen Formen mit rationalen Zahlenkoeffizienten völlig analoge Theorie zu entwickeln**).

Eine Form (a, b, c) heißt *primitiv*, wenn die Koeffizienten keinen gemeinsamen rationalen Teiler haben; die Formen der Diskriminante Δ sind eo ipso primitiv. Ferner nenne ich eine Form (der Diskriminante Δ) *primär*, wenn der Grad von b kleiner ist als der von a. In der Schar

*) Die hier entwickelten Begriffsbildungen bleiben natürlich genau so für die allgemeinen n-seitigen Klassen bestehen. Die Einteilung der Wege in Klassen wird dabei eine immer feinere.

**) Den Fall $p = 1$ habe ich bereits früher in der S. 192, Anm. †) zitierten Arbeit erledigt. Wie mich Herr *G. Pick* aufmerksam gemacht hat, finden sich derartige Formen zuerst bei *N. H. Abel*: „Sur l'intégration de la formule différentielle etc.“, Oeuvres complètes, Christiania 1881, Bd. I. p. 104ff. S. ferner *G. Pick*: „Über die Integration hyperelliptischer Differentiale durch Logarithmen“, Wiener Ber., Bd. 85 (1882), wo Herr *G. Pick* solche Formen hinsichtlich Aequivalenz (reduzierte Formen und Transformationen in sich) auf wesentlich *algebraischer* Grundlage untersucht hat. Die *arithmetische Bedeutung* der Sache tritt jedoch — gerade wie bei den ganzzahligen Formen — erst durch Bezugnahme auf die Divisoren des entsprechenden quadratischen Funktionenkörpers hervor.

der zu einer Form (a, b, c) gehörigen *Parallelformen* (a, b', c'),

$$b' = b + 2ha,\ c' = c + bh + ah^2,$$

gibt es dann stets eine und nur eine primäre Form.

Es sei jetzt $\mathfrak{Q}$ ein beliebiger primärer Divisor vom Grad ϱ und $N(\mathfrak{Q}) = a$*). Nach §4 läßt sich die ganze rationale Funktion $b(z)$ höchstens vom Grad $\varrho - 1$ so bestimmen, daß

$$b + \sqrt{\Delta} \text{ durch } \mathfrak{Q} \text{ teilbar}$$

wird; $\mathfrak{Q}$ ist alsdann größter gemeinschaftlicher Teiler von a und $b + \sqrt{\Delta}$. Setzen wir alsdann

$$b^2 - \Delta = a \cdot 4c,$$

so entspricht dem primären Divisor in eindeutiger Weise die primäre Form (a, b, c) von der Diskriminante Δ.

Ist umgekehrt (a, b, c) eine beliebige Form dieser Art, so ist der größte gemeinschaftliche Teiler von a und $b + \sqrt{\Delta}$ nach Bemerkung 2) ein primärer Divisor $\mathfrak{Q}$, und wegen

$$(b + \sqrt{\Delta})(b - \sqrt{\Delta}) = 4ac$$

folgt überdies sofort, daß $a = N(\mathfrak{Q})$. Daher besteht

Satz 7: *Die primären Divisoren und primären Formen der Diskriminante Δ entsprechen einander ein-eindeutig.*

Dies gegenseitige Entsprechen erweitern wir durch die Festsetzung, daß einem beliebigen ganzen Divisor $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{r}$ die seinem primären Bestandteil $\mathfrak{Q}$ entsprechende Form zugeordnet werden soll und einer beliebigen Form (a, b, c) der Diskriminante Δ derjenige Divisor $\mathfrak{Q}$, welcher der in der zu (a, b, c) gehörenden Schar von Parallelformen enthaltenen primären Form entspricht. Offenbar ist $\mathfrak{Q}$ auch hier mit dem größten gemeinschaftlichen Teiler von a und $b + \sqrt{\Delta}$ identisch.

§ 11. Die Formenklassen.

Zwei Formen**) heißen *äquivalent* und werden in eine *Klasse* vereinigt, wenn die zugehörigen Divisoren äquivalent sind.

Dem Divisor $\mathfrak{Q} = 1$ entspricht die *Hauptform*

$$t_1^2 - \frac{\Delta}{4} t_2^2,$$

und die mit ihr äquivalenten bilden die Formen-Hauptklasse E.

*) Man beachte die Normierung der multiplikativen Konstanten (§ 1).

**) Es handelt sich hier nur um Formen von der Diskriminante Δ.

Nennt man jetzt eine Form (a, b, c) *reduziert*, wenn der Grad von a das Geschlecht p des Körpers nicht übersteigt, so läßt sich dem Satz 4[a] der analoge Satz an die Seite stellen:

Satz 8: *In jeder von E verschiedenen Formenklasse gibt es eine und nur eine reduzierte primäre Form.*

Die reduzierten primären Formen liefern hiermit ein vollständiges Repräsentantensystem für sämtliche Formenklassen.

Die Begriffe: entgegengesetzt, konjugiert, zusammengesetzt, zweiseitig usw. übertragen sich unmittelbar von den Divisoren auf die zugeordneten Formen. Insbesondere erhalten wir ein vollständiges Repräsentantensystem für alle (von E verschiedenen) zweiseitigen Formenklassen nach § 9 in den Formen

$$(z-e_i)\,t_1^2 - \frac{1}{4}(z-e_1)\cdots(z-e_{i-1})(z-e_{i+1})\cdots(z-e_{2p+1})\,t_2^2 \qquad (i=1,2,\ldots 2p)$$

sowie den daraus zusammengesetzten Formen.

Die Bedeutung der *Charaktere* wurde schon oben (§ 9) erörtert. Auch können wir die Formenklassen wie oben in *Arten* einteilen; die Klassen einer Art ergeben dann je dasselbe Quadrat.

§ 12. Divisorenringe.

Es sei Q eine beliebige ganze rationale Funktion, $\mathfrak{Q}$ der zugehörige Divisor. Um die quadratischen Formen von der Diskriminante $Q^2 \cdot \Delta$ in entsprechender Weise wie oben zu behandeln, ist es nötig, Funktionen- oder *Divisorenringe* zu betrachten. Da sich ihre Theorie derjenigen des quadratischen Zahlenkörpers*) ganz analog gestaltet, gehen wir nicht näher darauf ein, sondern erwähnen bloß den (auf § 4 beruhenden)

Satz 9: *Jedem zu $\mathfrak{Q}$ teilerfremden, ganzen primären Divisor $\mathfrak{M}$ entspricht eindeutig eine primitive primäre Form (a, b, c) von der Diskriminante $Q^2 \cdot \Delta$, wobei $a = N(\mathfrak{M})$ zu Q teilerfremd ist. Und zwar erhält man so alle derartigen Formen.*

Schließlich entsteht die Aufgabe, dieselben Untersuchungen auch für nicht hyperelliptische algebraische Funktionenkörper durchzuführen. Manche von den obigen Methoden würden sich ohne weiteres übertragen lassen; ich hoffe jedoch, später ausführlich darauf zurückzukommen.

*) S. *H. Weber*, Algebra III. 2. Aufl. 12.—14. Abschnitt.

Über Limesbildung und allgemeine Körpertheorie.

Von Herrn *Josef Kürschák* in Budapest.

I. Einleitung.

Der Begriff der Bewertung.

§ 1. In dieser Abhandlung soll in die Körpertheorie oder, in der Terminologie von Herrn *Julius König*, in die Theorie der *orthoiden* und *pseudoorthoiden Bereiche**) ein neuer Begriff eingeführt werden.

Es sei jedem Elemente (jeder Größe) a eines Körpers $\mathfrak{K}$ *eine reelle Zahl* $\|a\|$ *so zugeordnet, daß den folgenden Forderungen genügt wird:*

1. *es ist* $\|0\| = 0$, *für jedes von Null verschiedene a ist* $\|a\| > 0$,
2. *für jedes Element a ist*

$$\|1 + a\| \leqq 1 + \|a\|,$$

3. *für je zwei Elemente ist*

$$\|ab\| = \|a\| \, \|b\|,$$

---

*) *J. König, Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Größen*, Leipzig (1903), Seite 8 und 408.

Der Unterschied zwischen den zweierlei Bereichen besteht in dem verschiedenen Verhalten der absoluten Einheit, d. h. derjenigen Größe, die mit irgendeiner Größe A des Bereiches multipliziert als Produkt stets wieder A ergibt. Bezeichnen wir die absolute Einheit einfach mit 1, so sind in einem orthoiden Bereich

$$1, \quad 1 + 1, \quad 1 + 1 + 1, \ldots$$

sämtlich voneinander und von Null verschieden. In einem pseudoorthoiden Bereiche wird diese Folge nur eine endliche Anzahl verschiedener Glieder enthalten, und unter diesen wird auch Null vorkommen. Ist das p-te Glied das erste, welches gleich Null ist, so ist p stets eine gewöhnliche Primzahl.

E. Steinitz [*Algebraische Theorie der Körper*, dieses Journal, Bd. 137 (1909)] benutzt für die orthoiden Bereiche die Bezeichnung: *Körper von der Charakteristik* 0; die pseudoorthoiden Bereiche nennt er *Körper von der Charakteristik p.*

4. *es gibt in* $\mathfrak{K}$ *wenigstens ein solches Element, daß* $\|a\|$ *von Null und Eins verschieden ist.*

Ich nenne jede solche Zuordnung eine *Bewertung des Körpers* $\mathfrak{K}$, die Zahl $\|a\|$ aber die *Bewertung von* a.

Elemente von gleicher Bewertung bezeichne ich als *äquivalent* (in bezug auf die betrachtete Bewertung).

Die bekanntesten bewerteten Körper erhalten wir, wenn für $\mathfrak{K}$ ein reeller oder komplexer Zahlkörper gewählt und jeder Zahl ihr *absoluter Wert* zugeordnet wird. Der Begriff *Bewertung* ist also eine Verallgemeinerung des Begriffes *absoluter Wert.*

§ 2. Bedeutet $\mathfrak{K}$ den Körper der rationalen Zahlen, so gibt es außer der Bewertung mittels des absoluten Wertes noch unendlich viele andere Bewertungen.

Es bedeute nämlich p eine gegebene Primzahl. Dann kann jede von Null verschiedene rationale Zahl in der Gestalt

$$a = \frac{u}{v} p^{\alpha}$$

dargestellt werden, wo u und v zu p teilerfremde ganze Zahlen sind. Der Exponent α kann eine positive oder negative ganze Zahl sein, oder auch Null. Wird nun festgesetzt, daß

$$\|a\| = e^{-\alpha},$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet, und daß $\|0\| = 0$, so entspricht diese Festsetzung allen Forderungen, die wir an eine Bewertung gestellt haben.

Mit Ausnahme von

$$\|1 + a\| \leqq 1 + \|a\|$$

ist dies für jede Forderung augenfällig. Statt dieser Ungleichheit können wir aber sofort den folgenden Satz aussprechen:

Im betrachteten Falle ist $\|a + b\|$ *niemals größer als die größere der Zahlen* $\|a\|$ *und* $\|b\|$. *Sind* $\|a\|$ *und* $\|b\|$ *nicht gleich, so ist* $\|a + b\|$ *genau gleich der größeren der beiden Zahlen.*

Bei verschwindendem a oder b ist dies augenfällig. Sind aber a und b beide von Null verschieden, so sei in den Formeln

$$a = \frac{u}{v} p^{\alpha}, \quad b = \frac{u'}{v'} p^{\beta},$$

(in denen u, v, u' und v' zu p teilerfremde ganze Zahlen bedeuten) $\alpha \leqq \beta$, also $\|a\| \geqq \|b\|$. Dann wird

$$a + b = \frac{uv' p^{\alpha} + u' v p^{\beta}}{vv'} = \frac{uv' + u' v p^{\beta-\alpha}}{uv'} p^{\alpha},$$

und hieraus

$$\|a + b\| = \|uv' + u' v p^{\beta-\alpha}\| \, \|p^{\alpha}\|.$$

Da $uv' + u' v p^{\beta-\alpha}$ eine ganze Zahl ist, so ist

$$\|uv' + u' v p^{\beta-\alpha}\| \leqq 1$$

und

$$\|a + b\| < \|p^{\alpha}\| = \|a\|.$$

Im Falle $\alpha < \beta$ wird

$$\|uv' + u' v p^{\beta-\alpha}\| = 1,$$

also haben wir dann

$$\|a + b\| = \|a\|.$$

Bei der soeben besprochenen Bewertung wollen wir p den *Äquivalenz-Modul* nennen; die Zahl $\|a\| = e^{-\alpha}$ nennen wir die auf diesen Äquivalenz-Modul bezügliche Bewertung von a.

Bei verschiedener Wahl des Äquivalenz-Moduls p erhalten wir natürlich auch für den Körper der rationalen Zahlen je eine andere Bewertung.

§ 3. Andere einfache Beispiele bewerteter Körper erhalten wir in der folgenden Weise. Es bedeute Ω einen gegebenen orthoiden oder pseudoorthoiden Bereich, $\Omega(x_1, x_2, \ldots x_m)$ aber den Körper der aus Ω entstammenden rationalen Funktionen der neuen unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_m$. Mit anderen Worten: es sei $\Omega(x_1, x_2, \ldots x_m)$ die Gesamtheit derjenigen rationalen Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_m$, deren Koeffizienten Ω entnommen sind. P bedeute eine dem Bereiche Ω entstammende rationale ganze Funktion von $x_1, x_2, \ldots x_m$, die in Ω unzerlegbar ist.

Jede von Null verschiedene Größe $f(x_1, x_2, \ldots x_m)$ des Körpers $\Omega(x_1, x_2, \ldots x_m)$ bringen wir auf die Gestalt

$$f(x_1, x_2, \ldots x_m) = \frac{U}{V} P^{\alpha},$$

wo U und V zu P teilerfremde rationale ganze Funktionen sind, und wo α ein ganzer Exponent ist, der positiv, negativ oder Null sein kann.

Setzen wir wieder

$$\|f(x_1, x_2, \ldots x_m)\| = e^{-\alpha},$$

so erhalten wir für $\Omega(x_1, x_2, \ldots x_m)$ eine Bewertung.

§ 4. Die wichtigeren Sätze über absolute Werte bleiben für jede Bewertung gültig. Z. B. folgt aus

$$\|ab\| = \|a\|\,\|b\|$$

für $b = 1$, daß $\|1\| = 1$.

Für $a = b = -1$ erhalten wir sodann $1 = |-1|^2$, also $|-1| = 1$. Daraus ergibt sich $\|-a\| = \|a\|$.

Für jede natürliche ganze Zahl n ist bei jeder Bewertung $\|n\| \leq n$.

Für $n = 1$ wissen wir dies bereits. Gilt aber diese Ungleichung für irgendein n, so ist auch

$$\|1 + n\| \leq 1 + \|n\| \leq 1 + n.$$

In jedem bewerteten Körper ist

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|.$$

Im Falle $a = 0$ ist dies selbstverständlich. In jedem anderen Falle wird aber

$$\|a+b\| = \|a\|\,\|1 + \frac{b}{a}\| \leq \|a\|\left(1 + \|\frac{b}{a}\|\right) \leq \|a\| + \|b\|.$$

§ 5. Setzen wir hier für a und b die Differenzen $a - c$ und $c - b$, so ergibt sich

$$\|a - b\| \leq \|a - c\| + \|c - b\|.$$

Es ist also $\|a - b\|$ ein spezieller Fall des Begriffes *écart*, dessen allgemeine Definition*) bekanntlich die folgende ist:

Es sei für jedes Elementpaar a, b einer Mannigfaltigkeit eine reelle Zahl (a, b) so festgesetzt, daß

1. $(a, b) = 0$, *wenn a mit b identisch ist, in jedem anderen Falle aber sei* $(a, b) > 0$,

2. *für je drei Elemente a, b, c sei*

$$(a, b) \leq (a, c) + (c, b).$$

Dann wird (a, b) der écart von a und b genannt.

Umriß der Theorie der bewerteten Körper.

§ 6. Da die Bewertung von $a - b$, wie soeben gezeigt wurde, ein *écart* ist, so ist es naheliegend, die bekannten Begriffe des *Limes* und der *Fundamentalreihe* von den reellen und komplexen Zahlen auf die Größen eines beliebigen bewerteten Bereiches zu übertragen. Man braucht dabei nur in den gewöhnlichen Definitionen überall für den *absoluten Wert* den

*) *M. Fréchet, Sur quelques points du calcul fonctionnel*, Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo, Bd. 22 (1906). Siehe besonders den § 49 (S. 30).

Begriff *Bewertung* zu setzen. Die auf den Grenzwert bezüglichen, bekannten Sätze behalten zumeist auch nach dieser Verallgemeinerung ihre Gültigkeit.

Z. B.: *Bedeutet A eine beliebige Größe des bewerteten Körpers* $\Re$, *so gibt es immer eine solche Folge*

$$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$$

von Größen aus $\Re$, *daß sämtliche Glieder voneinander und von A verschieden sind und mit wachsendem n sich dem Limes A nähern.*

Trotz vieler Ähnlichkeiten werden wir natürlich auch wesentliche Unterschiede zwischen den Körpern finden, wenn wir ihr Verhalten bei der Limesbildung betrachten. Den wichtigsten Unterschied in dieser Hinsicht können wir sogar schon bei den gewöhnlichen Grenzübergängen bemerken. Es ist bekannt, daß im Körper der reellen Zahlen eine Folge nur dann und dann immer einen Grenzwert hat, wenn sie eine Fundamentalreihe ist. Hingegen ist im Körper der rationalen Zahlen diese Existenzbedingung des Grenzwertes zwar notwendig, aber nicht hinreichend. D. h. eine Folge von rationalen Zahlen wird, auch wenn sie eine Fundamentalreihe ist, nicht immer einen *rationalen* Grenzwert besitzen. Ja, man kann sogar behaupten, daß die irrationalen Zahlen eben dazu eingeführt wurden, um die Bestimmung des Limes einer Fundamentalreihe, die im Körper der rationalen Zahlen nur ausnahmsweise möglich ist, im Körper der reellen Zahlen zu einer stets ausführbaren Operation zu machen.

Hat in einem bewerteten Körper $\Re$ jede aus diesem Körper entnommene Fundamentalreihe einen Limes, *dann ist dieser Körper* (infolge des obigen allgemeinen Satzes) *identisch mit der Gesamtheit der Limes der in ihm enthaltenen Fundamentalreihen.* Wir nennen darum einen solchen Körper *perfekt.* (Der Begriff der Fundamentalreihe ist hier natürlich in jenem übertragenen Sinne gebraucht, bei dem an die Stelle des absoluten Wertes die zugrunde gelegte Bewertung zu nehmen ist.)

Das Ziel dieser Abhandlung ist, zu beweisen, daß *jeder bewertete Körper durch die Adjunktion passender neuer Elemente zu einem algebraisch abgeschlossenen, perfekten bewerteten Körper ergänzt werden kann.* (Ein Körper wird *algebraisch abgeschlossen* genannt, wenn jede diesem Körper entstammende rationale ganze Funktion $f(z)$ der neuen unabhängigen Veränderlichen z in diesem Körper in lineare Faktoren zerfällt.)

Um mein Ziel zu erreichen, zerlege ich die Frage nach der Möglichkeit der gewünschten Ergänzung in solche Teilfragen, die entweder in der Literatur bereits erledigt sind, oder wenigstens durch naheliegende Verallgemeinerungen bekannter Untersuchungen leicht beantwortet werden können.

Vorerst wollen wir die Forderung der algebraischen Abgeschlossenheit unbeachtet lassen und nur die Frage erwägen, *ob jeder bewertete Körper* zu einem perfekten bewerteten Körper ergänzt werden kann? Die Methoden zur Beantwortung dieser Frage stammen von Herrn *G. Cantor*. Die *Cantor*sche Theorie der irrationalen Zahlen ist im Grunde eben die Lösung dieser Frage für den Fall, daß der vorgelegte Körper aus der Gesamtheit der rationalen Zahlen besteht und diese mit ihren absoluten Werten bewertet sind. *Cantor*s Ideen können in jedem Falle angewendet werden und führen zur kleinsten perfekten Erweiterung des gegebenen Körpers $\mathfrak{R}$. Die so erhaltene Erweiterung nennen wir den *derivierten* Körper von $\mathfrak{R}$. Ist bereits $\mathfrak{R}$ ein perfekter Körper, so ist er sein eigener derivierter Körper.

In dem besonderen Falle, wo $\mathfrak{R}$ den Körper der rationalen Zahlen bedeutet, diese aber nicht mit ihrem absoluten Werte bewertet sind, sondern in bezug auf einen *Äquivalenzmodul* p (§ 2), erhalten wir als derivierten Körper denjenigen Körper, den Herr *K. Hensel**) mit $K(p)$ bezeichnet und dessen Elemente er *p-adische rationale Zahlen* nennt. Man kann diese p-adischen rationalen Zahlen direkt so *definieren*, daß sie teils in bezug auf den Äquivalenzmodul p bewertete gewöhnliche rationale Zahlen sind, teils neue Symbole, die so beschaffen sind, daß sie den Körper der in bezug auf p bewerteten rationalen Zahlen zu einem perfekten Körper erweitern. Ich möchte gleich an dieser Stelle hervorheben, daß diese Erkenntnis der Ausgangspunkt aller meiner Überlegungen über bewertete Körper war.

Bei den weiteren Teilfragen wollen wir unser Augenmerk auf die algebraisch abgeschlossenen Erweiterungen richten. Daß jeder Körper zu einem algebraisch abgeschlossenen Körper erweitert werden kann, das hat Herr *E. Steinitz* in seiner bereits zitierten Abhandlung bewiesen. Obzwar sein Beweis auf dem vielfach umstrittenen Wohlordnungssatz des Herrn *E. Zermelo* beruht, wollen wir denselben für streng annehmen. Es wird

*) Siehe insbesondere: *K. Hensel, Theorie der algebraischen Zahlen*, Bd. 1. Leipzig (1908).

uns dabei aber auch interessieren, wie es mit der Bewertung des erweiterten Körpers bestellt ist. Vom Stammkörper wollen wir dabei natürlich voraussetzen, daß er bewertet ist, sogar, daß er ein perfekter bewerteter Körper ist. Wir kommen so zu der Frage: *Kann die kleinste algebraisch abgeschlossene Erweiterung eines perfekten bewerteten Körpers* $\Re$ *stets so bewertet werden, daß die Bewertung des Stammkörpers unverändert bleibt?*

Bekanntlich wird jede Größe des erweiterten Körpers einer und nur einer solchen algebraischen Gleichung genügen, deren Koeffizienten dem Stammkörper $\Re$ entnommen sind, und die in $\Re$ irreduzibel ist. Wir nennen diese Gleichung die Definitionsgleichung jener Größe und fordern, daß solchen Größen, welche durch dieselbe Definitionsgleichung bestimmt sind, gleiche Bewertung zukommt.

Es ist dann evident, daß die der Definitionsgleichung

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

genügende Größe α keine andere Bewertung erhalten kann, als

$$|\alpha| = |a_n|^{\frac{1}{n}}.$$

Wird aber die so zugeordnete Zahl $|\alpha|$ *in der Tat eine Bewertung von* α *sein, d. h. wird diese Zuordnung den Forderungen*

$$|\alpha\beta| = |\alpha|\,|\beta|,$$
$$|1+\alpha| \leqq 1 + |\alpha|$$

entsprechen?

Daß im erweiterten Körper für jedes Produkt die Gleichung

$$|\alpha\beta| = |\alpha|\,|\beta|$$

richtig ist, das kann mit Hilfe der *Galois*schen Theorie leicht bewiesen werden. Dabei spielt der Umstand, daß der Stammbereich perfekt ist, gar keine Rolle.

Wollen wir aber auch

$$|1+\alpha| \leqq 1 + |\alpha|$$

für den erweiterten Körper beweisen, so gelingt dies nur mit solchen Hilfsmitteln, bei denen die Perfektheit des Stammbereiches wesentlich ist. Für den Fall, daß der Stammbereich $K(p)$, d. h. der Körper der p-adischen rationalen Zahlen ist (und für eine Reihe anderer Fälle, in denen die Bewertung auf Teilbarkeit beruht), stammt das angemessenste Hilfsmittel von Herrn *K. Hensel*. Es besteht in seinen schönen Untersuchungen über die

Zerlegung der ganzen Funktionen mit p-adischen Koeffizienten in ihre irreduziblen Faktoren*). Aus diesen Untersuchungen ist es ihm ein leichtes, nachstehende wichtige Folgerung**) zu ziehen:

Sind die Koeffizienten von

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$$

aus $K(p)$ *entnommen und ist* $\|a_n\| \leqq 1$, *so kann diese Funktion nur dann in* $K(p)$ *irreduktibel sein, wenn auch* $\|a_1\|, \ldots \|a_n\|$ *sämtlich* $\leqq 1$ *sind.*

Nehmen wir noch in Betracht, daß im Körper $K(p)$ die Bewertung von $a + b$ niemals größer ist als die größere der Zahlen $\|a\|, \|b\|$, so ersehen wir hieraus unmittelbar die Richtigkeit der folgenden Behauptung:

Ist in der irreduktiblen Funktion

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$$

$\|a_n\| \leqq 1$, *so ist auch in*

$$f(t-1) = t^n + \cdots + b_n$$

die Bewertung von

$$b_n = (-1)^n + a_1 (-1)^{n-1} + \cdots + a_n$$

gewiß $\leqq 1$.

Das ist aber eben der zu beweisende Satz mit der unwesentlichen Beschränkung $\|a_n\| \leqq 1$.

Dieser *Hensel*sche Beweis kann in allen Fällen angewandt werden, wenn die Bewertung von der besonderen Beschaffenheit ist, daß $\|a + b\|$ nicht größer ist als die größere der Zahlen $\|a\|$ und $\|b\|$. Es wäre sehr erwünscht, die von Herrn *Hensel* für die Zerlegungen in $K(p)$ gefundenen fundamentalen Sätze mit den nötigen Änderungen so zu verallgemeinern, daß sie auch dann zum Ziele führen, wenn die Bewertung nicht von der soeben besagten Beschaffenheit ist. Mir ist diese Verallgemeinerung nicht gelungen. Wohl aber fand ich in der *Thèse* des Herrn *J. Hadamard****) die Hilfsmittel zum allgemeinen Beweise des Satzes, daß, wenn wir die der Definitionsgleichung

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

---

*) Siehe z. B. das vierte Kapitel des bereits erwähnten Buches.

**) Ich meine a. a. O. Seite 74, wo sogar etwas *mehr* gefolgert ist.

***) *J. Hadamard, Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor.* Journal de Math., Série 4, T. 8 (1892). Siehe insbesondere Nr. 15—18 (Seite 119—125).

entsprechende Größe α mit $\|\alpha\| = |a_n|^{\frac{1}{n}}$ bewerten, hierdurch die Forderung $\|1+\alpha\| \leqq 1+\|\alpha\|$ befriedigt wird.

Hadamard hat in seiner *Thèse* unter anderem die Frage gelöst: *Was ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zu einer vorgelegten Potenzreihe* $\mathfrak{P}(z)$ *eine solche rationale ganze Funktion* $f(z)$ *gefunden werden kann, für welche der Konvergenzradius von* $\mathfrak{P}(z)\,f(z)$ *denjenigen von* $\mathfrak{P}(z)$ *übertrifft?*

Des weiteren: *Wenn es solche rationale ganze Funktionen* $f(z)$ *gibt, wie finden wir unter ihnen diejenige vom niedrigsten Grade?*

Bei *Hadamard* begegnen wir diesen Fragen eigentlich in der folgenden Gestalt: *Wann hat eine Potenzreihe auf ihrem Konvergenzkreise keine anderen Singularitäten als Pole, und wie lassen sich diese bestimmen?*

In dieser Fassung knüpft sich die Frage an solche funktionentheoretische Begriffe, die wenigstens an dieser Stelle nicht auf beliebige perfekte bewertete Körper übertragen werden können.

Wird aber die *Hadamard*sche Frage in der obigen Fassung gestellt, so können nicht nur die Resultate, sondern auch die Überlegungen *Hadamard*s vom Körper der komplexen Zahlen auf einen beliebigen perfekten bewerteten Körper übertragen werden.

Vor allem kann der Begriff der Potenzreihe auf den Fall übertragen werden, daß die Koeffizienten nicht reelle oder komplexe Zahlen sind, sondern einem perfekten bewerteten Körper $\mathfrak{K}$ entnommen sind, und auch die *Werte*, welche die unabhängige Variable annimmt, Größen von $\mathfrak{K}$ sind. Sodann kann der Konvergenzradius für eine solche Potenzreihe

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_m z^m + \cdots$$

einfach so definiert werden, daß wir darunter den im gewöhnlichen Sinne gemeinten Konvergenzradius von

$$\|c_0\| + \|c_1\| r + \|c_2\| r^2 + \cdots + \|c_m\| r^m + \cdots$$

verstehen. Die *Hadamard*sche Frage hat dann in jedem perfekten bewerteten Körper $\mathfrak{K}$ einen Sinn, und sowohl die *Hadamard*schen Resultate als auch ihre Ableitung bleiben allgemein gültig.

Gehen wir zu Potenzreihen über, die nach negativen Potenzen fortschreiten, so kann auf Grund der *Hadamard*schen Resultate leicht die Richtigkeit des folgenden Satzes eingesehen werden:

Sind die Koeffizienten von

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$$

dem perfekten bewerteten Körper $\mathfrak{K}$ *entnommen und ist* $f(z)$ *in diesem Körper irreduzibel, so ist der Konvergenzradius von*

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \cdots$$

gleich $|a_n|^{\frac{1}{n}}$.

Nun bedeute α in irgendeiner Erweiterung von $\mathfrak{K}$ eine Wurzel der in $\mathfrak{K}$ irreduziblen Gleichung $f(z) = 0$, und setzen wir $|\alpha| = |a_n|^{\frac{1}{n}}$. Es wird dann in der Tat

$$|1+\alpha| \leqq 1 + |\alpha| .$$

Es ist dies identisch mit dem Satze, daß zwischen den Konvergenzradien l und l' der Reihen

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \cdots$$

und

$$\frac{1}{f(t-1)} = \frac{c_0'}{t} + \frac{c_1'}{t^2} + \cdots$$

die Ungleichheit

$$l' \leqq 1 + l$$

besteht.

Das bisherige setzt uns in die Lage, jeden bewerteten Körper zu einem *algebraisch abgeschlossenen, bewerteten* Körper zu erweitern. Ob dieser Körper auch *perfekt* ist, bleibt noch unbestimmt. Wohl aber wird der derivierte Körper dieses algebraisch abgeschlossenen Körpers, also seine kleinste perfekte Erweiterung, unseren sämtlichen Forderungen genügen. *Man kann nämlich beweisen, daß der derivierte Körper eines algebraisch abgeschlossenen, bewerteten Körpers* $\mathfrak{K}$ *stets wieder algebraisch abgeschlossen ist.*

Ist $\mathfrak{K}$ der Körper der algebraischen Zahlen, sind diese mit ihrem absoluten Werte bewertet und ist somit der derivierte Körper von $\mathfrak{K}$ die Gesamtheit der komplexen Zahlen, so erhellt die Richtigkeit meiner Behauptung aus dem fundamentalen Satz der Algebra. Natürlich hat man in der Algebra kaum einen Grund dafür, daß man diesen Teil des fundamentalen Satzes für sich beweise. Dennoch beginnt der *Weierstraß*sche

Beweis aus dem Jahre 1891*) im wesentlichen gerade mit diesem Teile. *Weierstraß*' Überlegungen können auch dann wiederholt werden, wenn $\Re$ ein beliebiger, algebraisch abgeschlossener, bewerteter Körper ist.

Auf diese Weise können wir mit Benutzung der Untersuchungen von *Cantor*, *Steinitz*, *Hadamard* und *Weierstraß* einen beliebigen bewerteten Körper erst zu einem perfekten, dann zu einem algebraisch abgeschlossenen, und endlich zu einem solchen bewerteten Körper erweitern, der sowohl perfekt als auch algebraisch abgeschlossen ist.

Zu dem Begriffe der Bewertung führte mich § 5 von Herrn *K. Hensels* Abhandlung**) „Über die arithmetischen Eigenschaften der Zahlen". Es ist dort für die p-adischen Zahlen ein Analogon des absoluten Wertes eingeführt und mit $|\gamma|_p$ bezeichnet. Für die rationale Zahl

$$\gamma = p^a \frac{u}{v},$$

wo u und v durch p nicht teilbare ganze Zahlen sind, ist***)

$$|\gamma|_p = p^{-a}.$$

Indem ich auf der rechten Seite p erst durch $\frac{1}{p}$ und dann durch $\frac{1}{e}$ ersetzte, kam ich zum Begriffe der Bewertung nach dem Äquivalenzmodul p und damit zum Ausgangspunkt aller meiner Betrachtungen. Auch weiterhin haben mir *Hensels* Untersuchungen über die p-adischen Zahlen, besonders seine Sätze über die Zerlegung der ganzen Funktionen mit p-adischen Koeffizienten, vielfache Anregung gegeben.

Da meine Untersuchungen beinahe ausnahmslos nur selbstverständliche Verallgemeinerungen bekannter Theorien sind, so scheint es mir zu genügen, wenn ich in den nächsten Kapiteln die einzelnen Definitionen und Sätze ausführlich darlege. Auf die Details der Beweise werde ich nur selten eingehen.

---

*) *K. Weierstraß*, *Neuer Beweis des Satzes, daß jede ganze rationale Funktion dargestellt werden kann als ein Produkt aus linearen Funktionen derselben Veränderlichen*, Sitzungsberichte d. Kgl. Pr. Akad. d. Wiss. Berlin, 1891, Seite 1085—1101. Werke Bd. 3. (1903) Seite 251—268.

**) Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 16 (1907). Die Definition von $|\gamma|_p$ befindet sich auf Seite 475.

***) Die Analogie von $|\gamma|_p$ mit dem absoluten Werte wird dadurch erreicht, daß $|\gamma|_p$ in der Theorie der p-adischen Zahlen für um so größer betrachtet wird, je kleiner p^a im gewöhnlichen Sinne ist.

II. Limesbildung in bewerteten Körpern.

Der allgemeine Limesbegriff.

§ 7. Die ausführlichere Darstellung der soeben skizzierten Theorie beginnen wir mit der allgemeinen Definition des Limesbegriffes, wie er fortan benutzt werden soll.

Wir sagen von einer dem bewerteten Körper $\mathfrak{K}$ entnommenen Folge von Elementen

$$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots,$$

ihre Glieder nähern sich (bei der zugrunde gelegten Bewertung) mit wachsendem n dem Elemente A von $\mathfrak{K}$, wenn zu jeder positiven reellen Zahl δ ein solches Glied a_N gefunden werden kann, daß für jedes spätere Glied

$$|a_n - A| < \delta$$

ist.

Gibt es in $\mathfrak{K}$ ein solches Element A, so wird es der *Limes der Folge* oder auch *der Limes von a_n* genannt und als

$$\lim a_n$$

bezeichnet.

Eine vorgelegte Folge kann im bewerteten Körper $\mathfrak{K}$ höchstens einen Limes haben.

Bedeutet A eine beliebige Größe des bewerteten Körpers und ist $0 < |\vartheta| < 1$, so sind die Glieder der Folge

$$A + \vartheta, \; A + \vartheta^2, \ldots A + \vartheta^n, \ldots$$

sämtlich voneinander und von A verschieden und nähern sich mit wachsendem n dem Limes A.

Solche ϑ, für die $0 < |\vartheta| < 1$, gibt es unendlich viele. Denn wir können nach dem vierten Postulate, das wir bezüglich der Bewertung gestellt haben, immer ein solches Element a finden, daß $|a|$ von Null und von Eins verschieden ist. Dann werden aber entweder alle positiven Potenzen von a oder aber alle negativen Potenzen von a als ϑ gewählt werden können.

§ 8. Der Begriff des Limes steht in enger Beziehung zu dem der *Fundamentalreihe.*

Wir sagen von der Folge

$$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots,$$

sie bilde eine Fundamentalreihe, wenn zu jeder positiven Zahl δ ein solches Glied a_N gefunden werden kann, daß

$$|a_n - a_{n+k}| < \delta,$$

wenn $n > N$ *und* $k > 0$.

Soll eine Folge einen Limes haben, so muß sie eine Fundamentalreihe sein.

Es wäre jedoch falsch, zu behaupten, daß jede aus $\mathfrak{R}$ entnommene Fundamentalreihe in $\mathfrak{R}$ einen Limes hat.

Gelingt es aber für eine aus einer vorgelegten Fundamentalreihe

$$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$$

entnommene unendliche Folge

$$a_h, a_k, \ldots$$

in $\mathfrak{R}$ einen Limes, sagen wir A, zu finden, so ist A auch Limes der vorgelegten Fundamentalreihe.

Vereinigen wir zwei Folgen

$$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$$

und

$$b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots$$

zu einer Folge

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots a_n, b_n, \ldots,$$

so ist diese neue Folge dann und nur dann eine Fundamentalreihe, wenn die einzelnen vorgelegten Folgen Fundamentalreihen bilden und die Folge

$$a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots a_n - b_n, \ldots$$

Null zum Limes hat.

Ist

$$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$$

in $\mathfrak{R}$ (bei der zu Grunde gelegten Bewertung) *eine Fundamentalreihe, so ist*

$$|a_1|, |a_2|, \ldots |a_n|, \ldots$$

im Körper der reellen Zahlen eine Fundamentalreihe im gewöhnlichen Sinne.

Ist

$$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$$

in $\mathfrak{R}$ eine Fundamentalreihe, so hat die reelle Zahlenfolge

$$|a_1|, |a_2|, \ldots |a_n|, \ldots$$

eine obere Schranke.

Zu einer Fundamentalreihe, für welche Null kein Limes ist, kann

immer eine positive Zahl g gefunden werden, so daß von einem Gliede a_N an für jedes Glied die Ungleichheit

$$\|a_n\| > g$$

gilt.

§ 10. *Bedeuten*

$$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$$
$$b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots$$

Fundamentalreihen, so sind auch

(1.) $$a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots a_n + b_n, \ldots$$

(2.) $$a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots a_n - b_n, \ldots$$

(3.) $$a_1 b_1, \quad a_2 b_2, \ldots \quad a_n b_n, \ldots$$

Fundamentalreihen.

§ 11. Wir wollen im folgenden gestatten, daß die für die Bildung einer Folge gegebene Vorschrift ihrem Wortlaute nach für eine *endliche* Anzahl von Gliedern sinnlos werde. Wir werden dann nur diejenigen Glieder bilden, für welche die Vorschrift einen Sinn hat. Jede Behauptung über die Folge ist dann für die Folge der wirklich erzeugbaren Glieder zu verstehen.

In diesem Sinne gilt der folgende Satz:

Bedeutet

$$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$$

eine Fundamentalreihe und ist Null kein Limes für dieselbe, so ist

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots \frac{1}{a_n}, \ldots$$

eine Fundamentalreihe.

§ 12. *Es seien die Elemente der Folgen*

$$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$$
$$b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots$$

aus $\mathfrak{R}$ so gewählt, daß die erste Folge den Limes A, die zweite den Limes B hat. Es ist dann

$$A + B = \lim (a_n + b_n), \quad A - B = \lim (a_n - b_n)$$
$$A B = \lim a_n b_n.$$

Ist B von Null verschieden, so ist auch

$$\frac{A}{B} = \lim \frac{a_n}{b_n}.$$

Außerdem ist $\|A\|$ der im gewöhnlichen Sinne genommene Limes von $\|a_n\|$.

Aus

$$A - B = \lim (a_n - b_n)$$

ist leicht ersichtlich, daß, *wenn die Folge*

$$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$$

den Limes A hat, diese Größe A dann und nur dann auch Limes von

$$b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots$$

ist, wenn die Gleichung

$$\lim (a_n - b_n) = 0$$

gilt.

Adjunktion idealer Limes.

§ 13. Die Gesamtheit der mit ihrem absoluten Werte bewerteten rationalen Zahlen ist ein einfaches Beispiel eines solchen Körpers, in dem nicht jede Fundamentalreihe einen Limes hat.

Sobald ein bewerteter Körper $\mathfrak{K}$ so beschaffen ist, daß in ihm nicht jede Fundamentalreihe einen Limes hat, kann $\mathfrak{K}$ in der folgenden Weise erweitert werden:

Zu jeder aus $\mathfrak{K}$ ausgewählten Fundamentalreihe, die in $\mathfrak{K}$ keinen Limes hat, erzeugen wir eine neue Größe, die wir den durch diese Fundamentalreihe definierten idealen Limes nennen.

Nicht zu jeder solchen Fundamentalreihe erzeugen wir einen anderen idealen Limes, sondern wir werden zwei Fundamentalreihen

$$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$$

und

$$b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots$$

dann und nur dann denselben Limes zuschreiben, wenn auch

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots a_n, b_n, \ldots$$

eine Fundamentalreihe ist, also wenn

$$\lim (a_n - b_n) = 0.$$

Die Festsetzung ist so gemacht, daß, wenn

$$\lim a_n = \lim c_n$$

und

$$\lim b_n = \lim c_n$$

ist, dann auch

$$\lim a_n = \lim b_n$$

wird.

Diese Einführung idealer Limes ist die unmittelbare Verallgemeinerung des Weges, auf dem Herr *G. Cantor* von den rationalen Zahlen zu den

irrationalen kommt, und ein spezieller Fall des sehr allgemeinen Verfahrens für die Einführung ideeller Häufungsstellen, das Herr *Fr. Riesz**) angegeben hat.

Nach der Einführung idealer Limes hat eine dem bewerteten Körper $\mathfrak{K}$ entnommene Folge

$$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$$

nur dann und dann immer einen Limes, wenn sie eine Fundamentalreihe ist. Ist diese Bedingung befriedigt, so ist der Limes durch die gegebene Folge eindeutig bestimmt.

Die Aussage, eine dem Körper $\mathfrak{K}$ entnommene Folge habe den Limes A, hat freilich einen ganz verschiedenen Sinn, je nachdem A ein idealer Limes ist oder aber eine wirkliche Größe von $\mathfrak{K}$.

§ 14. Nunmehr wollen wir die Größen des Körpers $\mathfrak{K}$ und dessen ideale Limes zu einem Bereiche $\mathfrak{K}'$ zusammenfassen und für diesen die folgende Festsetzung machen:

Sind A und B die Limes der aus $\mathfrak{K}$ entnommenen Fundamentalreihen

$$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$$

und

$$b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots,$$

so bezeichnen wir den Limes von

$$a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots a_n + b_n, \ldots$$

als die Summe $A + B$ und den Limes von

$$a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots a_n b_n, \ldots$$

als das Produkt AB.

Diese Festsetzungen sind so gewählt, daß es bei der Addition und Multiplikation der Größen von $\mathfrak{K}$ ganz gleichgültig ist, ob man sie als Elemente von $\mathfrak{K}$ oder als Elemente von $\mathfrak{K}'$ betrachtet.

Auch kann in bekannter Weise leicht bewiesen werden, daß $\mathfrak{K}'$ wieder ein *Körper* ist, und zwar ein orthoider oder ein pseudoorthoider Bereich, je nach der Beschaffenheit von $\mathfrak{K}$.

§ 15. Wir wollen nun die Größen von $\mathfrak{K}'$ in der folgenden Weise bewerten:

Der Größe

$$A = \lim a_n$$

*) *Fr. Riesz*, *Stetigkeit und abstrakte Mengenlehre*, Atti del IV congresso int. dei Mathematici, (Roma, 6—11 aprile 1908), Bd. 2, Seite 18—24.

entspreche der im gewöhnlichen Sinne genommene Limes von a_n *als Bewertung.*

Hier ist unter a_n die Bewertung von a_n im Körper $\mathfrak{K}$ zu verstehen.

Ist A eine Größe von $\mathfrak{K}$, so ist die für A festgesetzte Bewertung in $\mathfrak{K}'$ dieselbe wie in $\mathfrak{K}$.

Auch ist es evident, daß die für die Größen von $\mathfrak{K}'$ festgesetzte Bewertung in der Tat den Bedingungen

$$|1 + A| < 1 + |A|,$$

$$|AB| = |A|\,|B|$$

entspricht. Es folgt dies durch Grenzübergang aus

$$|1 + a_n| < 1 + |a_n|$$

und

$$|a_n b_n| = |a_n|\,|b_n|.$$

Ferner ist evident, daß nunmehr A, *das bisher nur als idealer Limes galt, in* $\mathfrak{K}'$ *ein wirklicher Limes von*

$$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$$

ist, d. h., daß zu jeder positiven Zahl δ *ein entsprechendes* N *existiert, für das*

$$|a_n - A| < \delta,$$

wenn $n > N$.

§ 16. *In* $\mathfrak{K}'$ *hat jede aus* $\mathfrak{K}'$ *entnommene Fundamentalreihe einen Limes.*

Für den Fall, daß die Größen der Fundamentalreihe dem Stammkörper $\mathfrak{K}$ entnommen sind, wissen wir dies bereits. Indem wir dies benutzen, kann der allgemeine Beweis in der folgenden bekannten Weise erbracht werden.

Es sei die vorgelegte Fundamentalreihe

(1.) $$A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots .$$

Sind nun

$$\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n, \ldots$$

solche positive Zahlen, für welche der im gewöhnlichen Sinne genommene Limes gleich Null ist, so können wir aus $\mathfrak{K}$ stets eine solche Folge

(2.) $$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$$

entnehmen, daß

$$|a_n - A_n| < \delta_n.$$

Die Folge (2.) ist dann ebenfalls eine Fundamentalreihe, und zwar eine

solche, von der wir bereits wissen, daß sie einen Limes hat. Dieser Limes ist aber dann auch Limes der Fundamentalreihe (1.)

Bezeichnen wir diejenigen bewerteten Körper, in denen jede aus ihnen entnommene Fundamentalreihe einen Limes hat, als *perfekt*, so können wir das Resultat unserer Überlegungen in der Aussage zusammenfassen:

Jeder bewertete Körper kann zu einem perfekten Körper erweitert werden.

§ 17. Es seien $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ zwei solche bewertete Erweiterungen des bewerteten Körpers $\mathfrak{K}$, in denen jede Größe von $\mathfrak{K}$ ihre ursprüngliche Bewertung beibehalten hat. Wir sagen von diesen Erweiterungen, daß sie (vom Standpunkte der Bewertung) *im wesentlichen identisch* sind, wenn ihre Größen ein-eindeutig so aufeinander bezogen werden können, daß

1. die Elemente von $\mathfrak{K}$ sich selbst entsprechen,

2. wenn a und a', b und b' entsprechende Elemente sind, auch $a+b$ und $a'+b'$, ebenso ab und $a'b'$ einander entsprechende Elemente sind,

3. entsprechende Elemente gleiche Bewertung haben.

Jede solche perfekte bewertete Erweiterung von $\mathfrak{K}$, in der die Elemente von $\mathfrak{K}$ ihre ursprüngliche Bewertung beibehalten haben, ist entweder mit dem soeben gebildeten Körper $\mathfrak{K}'$ im wesentlichen identisch, oder sie enthält einen echten Teil, der mit $\mathfrak{K}'$ im wesentlichen identisch ist.

Demnach ist $\mathfrak{K}'$ die kleinste perfekte bewertete Erweiterung von $\mathfrak{K}$.

Wir nennen den Körper $\mathfrak{K}'$ den *derivierten* Körper von $\mathfrak{K}$. Ist $\mathfrak{K}$ bereits selbst ein perfekter bewerteter Körper, so verstehen wir unter seinem derivierten Körper ihn selbst.

Unendliche Reihen.

§ 18. Es bedeute nunmehr $\mathfrak{K}$ einen perfekten bewerteten Körper. Ist die aus $\mathfrak{K}$ entnommene Folge

$$u_0, u_1, u_2, \dots$$

so beschaffen, daß

$$s_0 = u_0, \quad s_1 = u_0 + u_1, \quad s_2 = u_0 + u_1 + u_2, \dots$$

eine Fundamentalreihe ist, so sagen wir von der unendlichen Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots,$$

sie sei *konvergent*, und bezeichnen

$$S = \lim s_n$$

als *Summe* dieser Reihe.

Zur Konvergenz der Reihe ist

$$\lim u_n = 0$$

eine notwendige, aber an sich nicht hinreichende Bedingung.

Eine hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung der Konvergenz ist, daß

$$|u_0| + |u_1| + |u_2| + \cdots$$

im gewöhnlichen Sinne konvergiert.

Ist diese Bedingung befriedigt, so sagen wir von der ursprünglichen Reihe, sie sei *absolut konvergent.*

Die Summe einer absolut konvergenten Reihe ist unabhängig von der Reihenfolge.

Das Gesagte kann leicht für mehrfache Reihen verallgemeinert werden.

Die p-adischen rationalen Zahlen.

§ 19. Bewerten wir die rationalen Zahlen in bezug auf einen Äquivalenzmodul p (§ 2), und ergänzen wir den so bewerteten Körper der rationalen Zahlen zu einem perfekten bewerteten Körper. Die Elemente des so erhaltenen Körpers nennen wir mit *K. Hensel* die *p-adischen rationalen Zahlen.* Ihre Gesamtheit bezeichnen wir mit $K(p)$. Dieser Körper $K(p)$ ist natürlich für jede Wahl des Äquivalenzmoduls p ein anderer.

Nach dem Gesagten ist jede Größe A des Körpes $K(p)$ der Limes einer Fundamentalreihe

$$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots \tag{1.}$$

von rationalen Zahlen, wobei die Begriffe Limes und Fundamentalreihe natürlich nicht im gewöhnlichen Sinne zu nehmen sind, sondern hinsichtlich der auf den Äquivalenzmodul p bezüglichen Bewertung.

Ist A von Null verschieden, so hat in der Fundamentalreihe (1.) *von einem gewissen Gliede an jedes a_n dieselbe Bewertung.*

Man kann nämlich eine solche positive Zahl g angeben, daß von einem gewissen Gliede an stets $|a_n| > g$ und $|a_n - a_{n+k}| < g$. Dann ist aber

$$|a_{n+k}| = |a_n + (a_{n+k} - a_n)| = |a_n|.$$

Zugleich ist ersichtlich, daß $|A|$, d. h. der im gewöhnlichen Sinne genommene Limes von

$$|a_1|, |a_2|, \ldots |a_n|, \ldots,$$

gleich der Bewertung der a_n mit genügend großem Index ist. Es ist also

in $K(p)$ die Bewertung eines jeden Elementes gleich der Bewertung einer rationalen Zahl, also gleich der Bewertung einer Potenz von p oder aber Null.

Demnach wird durch die Bewertungen der Elemente von $K(p)$ die Gesamtheit der nicht negativen reellen Zahlen durchaus nicht erschöpft, sondern diese Bewertungen bilden nur eine abzählbare Menge, obzwar $K(p)$ ein perfekter bewerteter Körper ist.

§ 20. *In $K(p)$ ist $\|A+B\|$ niemals größer als die größere der Bewertungen $\|A\|$ und $\|B\|$. Sind $\|A\|$ und $\|B\|$ voneinander verschieden, so ist $\|A+B\|$ gleich der größeren der beiden Bewertungen $\|A\|, \|B\|$.*

Wenn nämlich in $K(p)$

$$A = \lim a_n, \qquad B = \lim b_n,$$

so ist $\|A+B\|$ gleich dem gewöhnlichen Limes von

$$\|a_1+b_1\|, \quad \|a_2+b_2\|, \ldots \|a_n+b_n\|, \ldots .$$

Wählen wir n genügend groß, so ist demnach

$$\|A\| = \|a_n\|, \quad \|B\| = \|b_n\|, \quad \|A+B\| = \|a_n+b_n\|.$$

Für die Bewertungen $\|a_n\|, \|b_n\|, \|a_n+b_n\|$ ist aber der ausgesprochene Satz bereits bekannt.

§ 21. Im allgemeinen ist in einem perfekten bewerteten Körper die Bedingung

$$\lim u_n = 0$$

zur Konvergenz von

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$$

nur notwendig, aber nicht hinreichend. *In $K(p)$ ist diese notwendige Bedingung zugleich eine hinreichende.*

Ist nämlich die Bedingung $\lim u_n = 0$ erfüllt. so wird für genügend große Werte von n auch die Bewertung

$$\|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+k}\|$$

für jedes k beliebig klein, da sie nicht größer sein kann als die größte der Zahlen

$$\|u_{n+1}\|, \quad \|u_{n+2}\|, \ldots \|u_{n+k}\|.$$

§ 22. *Zu jedem Elemente A des Körpers $K(p)$, das von Null verschieden ist, kann eine und nur eine solche rationale Zahl*

$$a\,p^{\alpha}$$

gefunden werden, in welcher α einen ganzen Exponenten bedeutet, der Koeffizient a irgendeine der ersten $p-1$ positiven rationalen ganzen Zahlen ist, und für die

$$\|A - a p^{\alpha}\| < |A| .$$

Es sei

$$A = \lim a_n .$$

Dann wird für genügend große n

$$|a_n| = |A| \quad \text{und} \quad |A - a_n| < |A| .$$

Nun ist a_n in der Gestalt

$$a_n = \frac{u}{v} p^{\alpha}$$

darstellbar, wo u und v durch p unteilbare rationale ganze Zahlen sind. Bestimmen wir noch a in der Weise, daß $u - av$ durch p teilbar wird, so erhalten wir

$$|a_n - a p^{\alpha}| < |a_n| = |A| .$$

Es ist also auch

$$\|A - a p^{\alpha}| = |A - a_n + (a_n - a p^{\alpha})\| < |A| .$$

Die so bestimmte Zahl $a p^{\alpha}$ ist die *einzige*, die unseren Forderungen entspricht. Denn α muß unbedingt so gewählt werden, daß $|p^{\alpha}\| = \|A|$. Aber auch a kann nicht in verschiedener Weise gewählt werden. Denn aus

$$|A - a p^{\alpha}\| < |A| = \|p^{\alpha}\|$$

und

$$|A - a' p^{\alpha}| < |A| = |p^{\alpha}|$$

folgt immer

$$|a - a'|\,|p^{\alpha}| = |a p^{\alpha} - a' p^{\alpha}| = |a p^{\alpha} - A - (A - a' p^{\alpha})\| < |p^{\alpha}| ,$$

also

$$|a - a'| < 1.$$

Sollen sowohl a als auch a' den Zahlen

$$1, 2, \ldots p - 1$$

entnommen sein, so ist dies nur so möglich, daß $a = a'$.

Die Zahl $a p^{\alpha}$ nennen wir den *Hauptteil* von A.

§ 23. *Jede von Null verschiedene Größe des Körpers $K(p)$ kann in eine und nur eine unendliche Reihe von der Gestalt*

(1.) $$a_0 p^{\alpha} + a_1 p^{\alpha+1} + \cdots + a_n p^{\alpha+n} + \cdots$$

entwickelt werden, wo die Exponenten rationale ganze Zahlen sind, die Koeffizienten

$$a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots$$

den Zahlen

$$0, 1, 2, \ldots p - 1$$

entnommen sind und a_0 von Null verschieden ist.

Wählen wir nämlich für $a_0 p^\alpha$ den Hauptteil von A; sodann habe $A - a_0 p^\alpha$ den Hauptteil $a_h p^{\alpha+h}$, die Differenz $A - (a_0 p^\alpha + a_h p^{\alpha+h})$ den Hauptteil $a_k p^{\alpha+k}$, usw. Nehmen wir in der gesuchten unendlichen Reihe die Koeffizienten von

$$p^\alpha,\ p^{\alpha+h},\ p^{\alpha+k}, \dots$$

gleich den so bestimmten Zahlen

$$a_0,\ a_h,\ a_k, \dots$$

und setzen die übrigen Koeffizienten gleich Null, so wird ihre Summe in $K(p)$ gleich A. Auch ist es evident, daß nur diese Reihe unseren Forderungen entsprechen kann.

Wir können hinzusetzen, daß jede Reihe von der Gestalt (1.) in $K(p)$ konvergiert, also eine Größe von $K(p)$ darstellt.

Hensel bezeichnet die Reihen (1.) als die *Normalform* der p-adischen rationalen Zahlen. In seiner Theorie dienen diese Reihen geradezu zur Definition der p-adischen rationalen Zahlen. Er geht nämlich davon aus, daß er diese Reihen einfach p-adische rationale Zahlen nennt und für sie solche Rechnungsregeln vorschreibt, daß ihr Bereich in jeder Hinsicht identisch ist mit demjenigen Bereiche $K(p)$, den wir mit Hilfe des Begriffes der Bewertung nach dem Äquivalenzmodul p definiert haben. Seine Theorie und die hiesige stehen also zueinander etwa wie eine lediglich auf den Begriff der unendlichen Dezimalbrüche gebaute Theorie der irrationalen reellen Zahlen zur *Cantor*schen Theorie.

III. Potenzreihen.

Der Konvergenzradius.

§ 24. Die Sätze, die über Potenzreihen mit reellen oder komplexen Koeffizienten bekannt sind, lassen sich zu einem großen Teile auch auf solche Potenzreihen

$$(1.) \qquad \mathfrak{P}(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_m z^m + \dots$$

übertragen, deren Koeffizienten einem beliebigen perfekten bewerteten Körper $\mathfrak{K}$ entnommen sind und in denen die Variabilität von z darin besteht, daß für z verschiedene aus $\mathfrak{K}$ entnommene Größen gesetzt werden.

Die Untersuchungen über die Reihe (1.) stehen in enger Beziehung mit denen über

(2.) $$|c_0| + |c_1|u + |c_2|u^2 + \cdots,$$

wo u eine positive reelle Veränderliche bedeutet.

Die obere Grenze R derjenigen Werte von u, für welche (2.) im gewöhnlichen Sinne konvergiert, hat für (1.) die folgende Bedeutung:

Die Reihe (1.) *ist absolut konvergent, wenn*

$$|z| < R;$$

hingegen ist für $|z| > R$ *nicht einmal*

$$\lim c_m z^m$$

gleich Null.

Wir nennen R den *Konvergenzradius* sowohl von (2.) als auch von (1.). Zur Berechnung von R dient die von *Cauchy**) gefundene Regel, *nach welcher* R *der reziproke Wert von*

$$l = \overline{\lim_{m=\infty}} |c_m|^{\frac{1}{m}}$$

ist.

Hier bedeutet $\overline{\lim_{m=\infty}} |c_m|^{\frac{1}{m}}$ den *Limes superior* oder die oberste Häufungsstelle von

$$|c_1|, |c_2|^{\frac{1}{2}}, \ldots |c_m|^{\frac{1}{m}}, \ldots .$$

Wir werden l als die *Cauchysche Konstante* von (1.) und (2.) bezeichnen.

Ist $\mathfrak{K}$ die Gesamtheit der komplexen Zahlen, so ist $R = \frac{1}{l}$ die *obere Grenze* für den absoluten Betrag derjenigen z, für die (1.) konvergiert. Für einen beliebigen perfekten bewerteten Körper läßt sich indes nur soviel behaupten, daß R eine *obere Schranke* für die Bewertung derjenigen z ist, für welche die betrachtete Potenzreihe konvergiert. Es hat dies seinen Grund darin, daß die in $\mathfrak{K}$ möglichen Bewertungen im allgemeinen keine überall dichte Menge von positiven Zahlen bilden.

Haben die Reihen

$$\mathfrak{P}_1(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

und

$$\mathfrak{P}_2(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots$$

die Cauchyschen Konstanten l_1 *und* l_2, *so kann die Cauchysche Konstante von*

$$\mathfrak{P}(z) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) z + (a_2 + b_2) z^2 + \cdots$$

nicht größer sein, als die größere der beiden Zahlen l_1 *und* l_2.

---

*) *A. Cauchy, Cours d'Analyse*, Paris (1821), p. 151.

Ist nämlich $0 < u < \frac{1}{l_1}$ und zugleich $0 < u < \frac{1}{l_2}$, so haben wir

$$\lim \| a_m \| u^m = \lim \| b_m \| u^m = \lim (\| a_m \| + \| b_m \|) u^m = 0$$

und somit auch

$$\lim \| a_m + b_m \| u^m = 0.$$

Es ist also der Konvergenzradius von

$$\sum_{m=0}^{\infty} \| a_m + b_m \| u^m$$

nicht kleiner als die kleinere der Zahlen $\frac{1}{l_1}$ und $\frac{1}{l_2}$. D. h. die *Cauchy*-sche Konstante dieser Reihe kann in der Tat nicht größer sein als die größere der beiden Zahlen l_1 und l_2.

Bezeichnen wir die größere der Zahlen l_1 und l_2 mit l, so ist auch leicht ersichtlich, daß

$$\mathfrak{P}(z) = \mathfrak{P}_1(z) + \mathfrak{P}_2(z),$$

wenn $\| z \| < \frac{1}{l}$.

§ 25. Betrachten wir z. B. die Reihe

$$H_n(z) = 1 + \binom{n}{1} z + \binom{n+1}{2} z^2 + \cdots + \binom{m+n-1}{n} z^m + \cdots .$$

Die Untersuchung erfolge in einem beliebigen perfekten bewerteten Körper $\mathfrak{K}$.

Ist $\mathfrak{K}$ der Körper der komplexen Zahlen, so ist bekanntlich die *Cauchy*sche Konstante der Reihe gleich Eins. Wir haben also

$$\overline{\lim_{m=\infty}} \binom{m+n-1}{m}^{\frac{1}{m}} = 1.$$

Mit Hilfe dieser Formel können wir nun für jede Wahl von $\mathfrak{K}$ die Untersuchung in der folgenden Weise erledigen.

Da die Koeffizienten von $H_n(z)$ natürliche ganze Zahlen sind, so ist

$$\left\| \binom{m+n-1}{m} \right\| \leqq \binom{m+n-1}{n},$$

somit

$$l = \lim_{m=\infty} \left\| \binom{m+n-1}{m} \right\|^{\frac{1}{m}} \leqq \overline{\lim_{m=\infty}} \binom{m+n-1}{m}^{\frac{1}{m}} = 1.$$

Demnach ist der Konvergenzradius der betrachteten Reihe $\geqq 1$.

Wo $H_n(z)$ konvergiert, ist auch $H_{n-1}(z)$ konvergent und

$$(1-z)H_n(z) = H_{n-1}(z),$$

also

$$(1.)\quad (1-z)^n H_n(z) = (1-z)^{n-1} H_{n-1}(z) = \cdots = (1-z)H_1(z) = 1.$$

Zufolge dieser Formel kann $H_n(z)$ für $z=1$ nicht konvergieren. Es kann also l nicht kleiner als 1 sein, sondern es ist stets

$$l = 1.$$

§ 26. *Sind die Koeffizienten von*

$$\mathfrak{P}_1(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots,$$
$$\mathfrak{P}_2(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots$$

einem perfekten bewerteten Körper $\mathfrak{K}$ *entnommen und kann man* $\mathfrak{K}$ *eine solche der Null als Limes zustrebende Folge*

$$z_1, z_2, \ldots z_n, \ldots$$

entnehmen, daß

$$\mathfrak{P}_1(z_1) = \mathfrak{P}_2(z_1),\ \mathfrak{P}_1(z_2) = \mathfrak{P}_2(z_2), \ldots \mathfrak{P}_1(z_n) = \mathfrak{P}_2(z_n), \ldots,$$

so ist

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1, \ldots a_n = b_n, \ldots .$$

Hadamards Sätze.

§ 27. Es seien die Koeffizienten der Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots,$$

wie auch diejenigen der rationalen ganzen Funktion

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_k z^k + \cdots + a_n z^n$$

dem perfekten bewerteten Körper $\mathfrak{K}$ entnommen. Die *Cauchy*sche Konstante von $\mathfrak{P}(z)$ bezeichnen wir mit l.

Multiplizieren wir jedes Glied von $\mathfrak{P}(z)$ mit $a_k z^k$, so erhalten wir als Produkt eine Potenzreihe $\mathfrak{P}_k(z)$, deren *Cauchy*sche Konstante entweder wieder l oder aber Null ist (je nachdem a_k von Null verschieden oder aber gleich Null ist). Addiert man noch die ähnlichen Glieder von $\mathfrak{P}_0(z), \mathfrak{P}_1(z), \ldots \mathfrak{P}_n(z)$, so ergibt sich eine Potenzreihe $\overline{\mathfrak{P}}(z)$, deren *Cauchy*sche Konstante $\leqq l$ und deren Summe dort, wo $\mathfrak{P}(z)$ konvergiert, gleich $\mathfrak{P}(z)f(z)$ ist.

Wir bezeichnen darum $\overline{\mathfrak{P}}(z)$ im folgenden zur Abkürzung mit $\mathfrak{P}f$.

§ 28. Im allgemeinen wird die *Cauchy*sche Konstante von $\mathfrak{P}f$ mit derjenigen von $\mathfrak{P}(z)$ identisch sein. Mitunter kann man aber zu $\mathfrak{P}(z)$ auch solche rationalen ganzen Funktionen $f(z)$ finden, daß die *Cauchy*sche

Konstante von $\mathfrak{P}f$ kleiner ist als diejenige von $\mathfrak{P}(z)$. Wann es solche $f(z)$ gibt, und wie man dann eine solche rationale ganze Funktion bestimmen kann, darüber finden wir in den Untersuchungen des Herrn *J. Hadamard* *) die folgenden Sätze:

I. *Es sei zur Abkürzung*

$$D_{mp} = \begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} & \cdots & c_{m+p} \\ c_{m+1} & c_{m+2} & \cdots & c_{m+p+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{m+p} & c_{m+p+1} & \cdots & c_{m+2p} \end{vmatrix}$$

und

$$l_p = \overline{\lim_{m=\infty}} \| D_{mp} \|^{\frac{1}{m}}.$$

a) *Es ist dann bei jedem positiven ganzen Wert von* p

$$l_p \leqq l^{p+1},$$

wo

$$l = l_0 = \overline{\lim_{m=\infty}} \| c_m \|^{\frac{1}{m}}.$$

b) *Gibt es eine rationale ganze Funktion* $f(z)$ *vom Grade* p, *für die* $\mathfrak{P}f$ *eine kleinere Cauchysche Konstante hat als* $\mathfrak{P}(z)$, *so ist für diesen Wert von* p

$$l_p < l^{p+1}.$$

Wenn also für jedes p

$$l_p = l^{p+1}$$

ist, so gibt es überhaupt keine rationale ganze Funktionen $f(z)$ *von der geforderten Beschaffenheit.*

II. *Gibt es aber solche* p, *für die*

$$l_p < l^{p+1},$$

und bezeichnen wir mit p *die kleinste Zahl, für welche dies eintritt, so gilt für dieses* p *folgendes:*

a) *Es ist in diesem Falle* l_{p-1} *nicht nur der Limes superior von*

$$\| D_{1\,p-1} \|, \ \| D_{2\,p-1} \|^{\frac{1}{2}}, \ \| D_{3\,p-1} \|^{\frac{1}{3}}, \ \ldots,$$

---

*) *J. Hadamard, Essai* etc. Insbesondere Nr. 15—18.

Die Sätze sind an der genannten Stelle natürlich nur für den Fall behandelt, daß $\mathfrak{K}$ den Körper der komplexen Zahlen bedeutet. Die Sätze und ihre Beweise sind aber für jeden perfekten bewerteten Körper $\mathfrak{K}$ richtig.

sondern zugleich der im gewöhnlichen Sinne genommene Limes dieser Folge.

b) *Für große Werte von m lassen sich die Unbekannten*

$$A_m^{(1)}, \dots A_m^{(p)}$$

aus dem Gleichungssysteme

$$c_{m+p+h} + c_{m+p+h-1} A_m^{(1)} + \cdots + c_{m+h} A_m^{(p)} = 0, \qquad (h=0, 1, \dots p-1)$$

eindeutig bestimmen und nähern sich bei wachsendem m gewissen Grenzen

$$A^{(1)}, \dots A^{(p)}.$$

c) *Benutzen wir diese Limes als Koeffizienten von*

$$f(z) = 1 + A^{(1)} z + \cdots + A^{(p)} z^p,$$

so hat $\mathfrak{P} f$ *eine kleinere Cauchysche Konstante als* $\mathfrak{P}(z)$.

§ 29. *Bedeuten* $f_1(z)$ *und* $f_2(z)$ *solche rationalen ganzen Funktionen, daß* $\mathfrak{P} f_1$ *und* $\mathfrak{P} f_2$ *kleinere Cauchysche Konstanten haben als* $\mathfrak{P}(z)$, *so ist auch*

$$f_1(z)\, g_1(z) + f_2(z)\, g_2(z)$$

eine solche rationale ganze Funktion.

Hier bedeuten $g_1(z)$ und $g_2(z)$ beliebige rationale ganze Funktionen.

Aus dem Gesagten ist evident, daß, *wenn wir unter den rationalen ganzen Funktionen von der besagten Beschaffenheit diejenige vom niedrigsten Grade auswählen, jede andere solche rationale ganze Funktion durch diese teilbar ist.*

Nun ergeben aber die Sätze von *Hadamard* eben diejenige Funktion $f(z)$, die vom niedrigsten Grade ist. Die Gesamtheit der entsprechenden Funktionen besteht also aus den Vielfachen der so gefundenen Funktion.

Anwendung der Sätze von Hadamard.

§ 30. Es seien

$$f(z) = 1 + a_1 z + \cdots + a_n z^n,$$
$$g(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_\nu z^\nu$$

solche rationalen ganzen Funktionen von z, deren Koeffizienten einem perfekten bewerteten Körper $\mathfrak{K}$ entnommen sind. Es läßt sich dann in bekannter Weise die Existenz einer und nur einer solchen Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_m z^m + \cdots$$

beweisen, daß

1. diese Reihe für solche z, die eine sehr kleine Bewertung haben, absolut konvergiert,

2. für jedes z, für welches die Reihe konvergiert, ihre Summe

gleich $\frac{g(z)}{f(z)}$ ist.

Im folgenden setzen wir voraus, daß $f(z)$ in $\mathfrak{K}$ irreduzibel und $g(z)$ nicht durch $f(z)$ teilbar ist. Wir werden für diesen Fall beweisen, daß *die Cauchysche Konstante von* $\mathfrak{P}(z)$ *gleich*

$$l = \|a_n\|^{\frac{1}{n}}$$

ist.

Die gesuchte *Cauchy*sche Konstante hängt nur von der Wahl von $f(z)$ ab, nicht aber von $g(z)$. Es ist in der Tat evident, daß diese Konstante für $\frac{g(z)}{f(z)}$ nicht größer sein kann als für $\frac{1}{f(z)}$. Sie kann aber auch nicht kleiner sein. Diejenigen rationalen ganzen Funktionen $h(z)$, für welche die *Cauchy*sche Konstante kleiner ist als für $\frac{1}{f(z)}$, sind nämlich alle durch diejenige vom niedrigsten Grade unter ihnen teilbar. Bezeichnen wir diese Funktion vom niedrigsten Grade mit $\bar{h}(z)$, so muß $f(z)$, da es auch ein $h(z)$ ist, durch $\bar{h}(z)$ teilbar sein. Das ist aber wegen der Irreduzibilität von $f(z)$ nur so möglich, daß $\bar{h}(z) = f(z)$. Nun haben wir aber von $g(z)$ vorausgesetzt, daß diese Funktion nicht durch $f(z)$ teilbar ist. Sie kann also nicht zu den $h(z)$ gehören.

Im folgenden dürfen wir also $g(z) = z^{n-1}$ voraussetzen. Es ist dann

$$c_0 = c_1 = \cdots = c_{n-2} = 0, \quad c_{n-1} = 1$$

und

$$c_{m+n} + a_1 c_{m+n-1} + \cdots + a_n c_m = 0. \qquad (m=0, 1, \ldots) \tag{1.}$$

Zufolge dieser Formel kann die letzte Kolonne der Determinante

$$D_{m\,n-1} = \begin{vmatrix} c_m & \cdots & c_{m+n-2} & c_{m+n-1} \\ c_{m+1} & \cdots & c_{m+n-1} & c_{m+n} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ c_{m+n-1} & \cdots & c_{m+2n-3} & c_{m+2n-2} \end{vmatrix}$$

auch so geschrieben werden:

$$\begin{matrix} -a_1 c_{m+n-2} & -\cdots- & a_{n-1} c_m & -a_n c_{m-1} \\ -a_1 c_{m+n-1} & -\cdots- & a_{n-1} c_{m+1} & -a_n c_m \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ -a_1 c_{m+2n-3} & -\cdots- & a_{n-1} c_{m+n-1} & -a_n c_{m+n-2}. \end{matrix}$$

Es ist also

$$D_{m\,n-1} = \begin{vmatrix} c_m & \dots & c_{m+n-2} & -a_n c_{m-1} \\ c_{m+1} & \dots & c_{m+n-1} & -a_n c_m \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ c_{m+n-1} & \dots & c_{m+2n-3} & -a_n c_{m+n-2} \end{vmatrix},$$

d. h.

$$D_{m\,n-1} = (-1)^n a_n D_{m-1\,n-1}.$$

Hieraus ergibt sich

$$D_{m\,n-1} = (-1)^{mn} a_n^m D_{0\,n-1}.$$

In dieser Formel ist

$$D_{0\,n-1} = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & c_n \\ 0 & \dots & 1 & c_n & c_{n+1} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \dots & c_{2n-4} & c_{2n-3} & c_{2n-2} \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Wir haben also

$$|D_{m\,n-1}| = |a_n|^m$$

und

$$l_{n-1} = \overline{\lim_{m=\infty}} |D_{m\,n-1}|^{\frac{1}{m}} = |a_n|.$$

Zufolge des Satzes I. a) von *Hadamard* ist $l_{n-1} \leqq l^n$, also ist

$$l \geqq |a_n|^{\frac{1}{n}}. \tag{2.}$$

Ziehen wir noch die Irreduzibilität von $f(z)$ in Betracht, so ist hier eine Ungleichheit ausgeschlossen. Denn wäre

$$l_{n-1} = |a_n| < l^n,$$

so gäbe es nach den Sätzen II. a)—c) von *Hadamard* eine solche rationale ganze Funktion $h(z)$ von niedrigerem Grade als $f(z)$, daß die *Cauchy*sche Konstante von $\mathfrak{P}h$ kleiner wäre als diejenige von $\mathfrak{P}$. Das ist aber wegen der Irreduzibilität von $f(z)$ unmöglich.

Damit ist der ausgesprochene Satz vollständig bewiesen.

Im folgenden wird uns nur der Fall interessieren, daß $g(z)$ von niedrigerem Grade ist als $f(z)$. Es ist dann $g(z)$ eo ipso durch die irreduzible Funktion $f(z)$ nicht teilbar. Wir können also für diesen Fall unser Ergebnis so aussprechen:

Sind die Koeffizienten von

$$f(z) = 1 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

und

$$g(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_\nu z^\nu$$

einem perfekten bewerteten Körper $\mathfrak{K}$ *entnommen, ist in diesem Körper* $f(z)$ *irreduzibel und ist* $\nu < n$, *so ist die Cauchysche Konstante von*

$$\frac{g(z)}{f(z)} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$$

gleich

$$l = \|a_n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Nach negativen Potenzen fortschreitende Reihen.

§ 31. Setzen wir in

(1.) $$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$$

an die Stelle von z nunmehr $\frac{1}{z}$ und dividieren dann mit z, so erhalten wir die Reihe

(2.) $$c_0 z^{-1} + c_1 z^{-2} + c_2 z^{-3} + \cdots .$$

Den Limes superior

$$l = \overline{\lim_{m=\infty}} \|c_m\|^{\frac{1}{m}}$$

nennen wir auch für diese Reihe die *Cauchysche Konstante.* Ist $\|z\| > l$, so ist die Reihe (2.) absolut konvergent. Ist $\|z\| < l$, so ist nicht einmal die Konvergenzbedingung

$$\lim_{m=\infty} c_m z^{-m-1} = 0$$

erfüllt. Wir nennen darum l auch den *Konvergenzradius* der Reihe (2.).

§ 32. Wenden wir das soeben Gesagte auf den § 25 an, so finden wir, daß *die Reihe*

$$z^{-1} + \binom{n}{1} z^{-2} + \binom{n+1}{2} z^{-3} + \cdots + \binom{m+n-1}{m} z^{-m-1} + \cdots$$

dann und nur dann absolut konvergiert, wenn $\|z\| > 1$. *Ist diese Bedingung befriedigt, so hat die Reihe*

$$\frac{z^{n-1}}{(z-1)^n}$$

zur Summe.

§ 33. Wird das, was wir in § 31 sagten, auf den Satz am Ende von § 30 angewandt, so erhalten wir folgendes:

Sind die Koeffizienten von

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$$

und

$$g(z) = b_0 z^{n-1} + b_1 z^{n-2} + \cdots + b_{n-1}$$

einem perfekten bewerteten Körper $\mathfrak{K}$ *entnommen und ist* $f(z)$ *in* $\mathfrak{K}$ *irreduzibel, so hat die Reihe*

$$\frac{g(z)}{f(z)} = c_0 z^{-1} + c_1 z^{-2} + c_2 z^{-3} + \cdots$$

die Cauchysche Konstante

$$l = |a_n|^{\frac{1}{n}}.$$

IV. Algebraische Erweiterungen.

Algebraische Grundbegriffe).*

§ 34. Es bedeute $\mathfrak{K}$ einen beliebigen Körper. Wir verlangen nicht einmal, daß $\mathfrak{K}$ bewertet sei. Einen Körper $\mathfrak{L}$, der aus $\mathfrak{K}$ durch Erweiterung entstanden ist, nennen wir eine *algebraische* Erweiterung von $\mathfrak{K}$, wenn jede Größe von $\mathfrak{L}$ einer solchen algebraischen Gleichung genügt, deren Koeffizienten $\mathfrak{K}$ entnommen sind. Diejenige Gleichung *niedrigsten Grades* mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$, welche eine Größe α des Körpers $\mathfrak{L}$ befriedigt, wird die *Definitionsgleichung* von α genannt. Sie ist in $\mathfrak{K}$ irreduzibel.

Zerfällt im Körper jede rationale ganze Funktion der Veränderlichen z in lineare Faktoren, so hat $\mathfrak{K}$ keine algebraischen Erweiterungen. In diesem Falle wird $\mathfrak{K}$ *algebraisch abgeschlossen* genannt.

In jedem anderen Falle hat $\mathfrak{K}$ wenigstens eine algebraische Erweiterung. Gibt es nämlich eine solche algebraische Gleichung von höherem als dem ersten Grade

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$, die in $\mathfrak{K}$ irreduzibel ist, so kann immer eine solche algebraische Erweiterung von $\mathfrak{K}$ gebildet werden, in welcher die vorgelegte Gleichung wenigstens eine Wurzel α besitzt. Die einfachste solche Erweiterung kann in folgender Weise gewonnen werden:

Es bedeute α ein neues Zeichen, und es werde mit den rationalen ganzen Funktionen von α (mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$) so gerechnet, als wäre α eine unabhängige Veränderliche, nur daß diejenigen Funktionen, deren Differenz durch

$$f(\alpha) = \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \cdots + a_n$$

teilbar ist, als einander gleich betrachtet werden. Wird mit den rationalen

---

*) Die hier zusammengestellten algebraischen Sätze sind zum Teil allgemein bekannt, zum Teil in der zitierten Abhandlung von *E. Steinitz* zum erstenmal bewiesen.

ganzen Funktionen von α (mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$) in dieser Weise gerechnet, so bildet ihre Gesamtheit einen solchen Körper, in dem α eine Wurzel der vorgelegten Gleichung ist. Man nennt diesen Körper den aus $\mathfrak{K}$ durch die *Adjunktion* der Wurzel α der vorgelegten Gleichung entstandenen erweiterten Körper.

§ 35. Bedeutet

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \tag{1.}$$

irgendeine gegebene algebraische Gleichung mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$, so wird die linke Seite dieser Gleichung entweder schon in $\mathfrak{K}$ in lineare Faktoren zerfallen, oder aber es kann aus $\mathfrak{K}$ durch allmähliche Erweiterung ein solcher Körper hergestellt werden, in dem dieses Zerfallen eintritt.

Es bedeute $\mathfrak{L}$ eine solche Erweiterung von $\mathfrak{K}$, in welcher die linke Seite von (1.) in lineare Faktoren zerfällt, und es seien ihre Wurzeln in $\mathfrak{L}$:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots .$$

Dann bilden die rationalen ganzen Funktionen dieser Wurzeln mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$ schon für sich einen Körper. Dieser Körper ist zur Zerlegung von

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n \tag{2.}$$

in lineare Faktoren *gerade hinreichend*, d. h. in ihm zerfällt diese Funktion in lineare Faktoren, es gibt aber keinen Körper zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$, in dem diese Zerlegung möglich ist.

Sind $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ zwei solche Erweiterungen von $\mathfrak{K}$, deren jede zur Zerlegung von (2.) in lineare Faktoren eben hinreicht, so sind sie vom algebraischen Standpunkte äquivalente Erweiterungen. Wir nennen zwei Erweiterungen von $\mathfrak{K}$ *vom algebraischen Standpunkte äquivalent*, wenn ihre Elemente so ein-eindeutig aufeinander bezogen werden können, daß 1. wenn den Elementen α, β die Elemente α', β' entsprechen, dann die zu $\alpha + \beta$ und $\alpha\beta$ entsprechenden Elemente $\alpha' + \beta'$ und $\alpha'\beta'$ sind, 2. die Elemente von $\mathfrak{K}$ sich selbst entsprechen.

§ 36. Es sei die Erweiterung $\mathfrak{L}$ des Körpers $\mathfrak{K}$ zur Zerlegung von

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$$

in lineare Faktoren eben hinreichend. Es ist dann $\mathfrak{L}$ stets eine *endliche* Erweiterung von $\mathfrak{K}$.

Eine Erweiterung $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{K}$ wird eine *endliche* genannt, wenn man aus $\mathfrak{L}$ eine endliche Anzahl von Elementen

$$u_1, u_2, \dots u_r$$

so auswählen kann, daß jedes weitere Element von $\mathfrak{L}$ in der Gestalt

$$A_1 u_1 + A_2 u_1 + \cdots + A_r u_r$$

darstellbar ist, wo die Koeffizienten A dem Körper $\mathfrak{K}$ entnommen sind.

Ist $\mathfrak{K}$ ein orthoider Bereich, so ist jede endliche Erweiterung von $\mathfrak{K}$ zugleich eine *einfache.*

Eine Erweiterung $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{K}$ wird als *einfach* bezeichnet, wenn es in $\mathfrak{L}$ ein solches Element α gibt, daß jedes Element von $\mathfrak{L}$ eine rationale Funktion von α, mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$, ist.

Ist $\mathfrak{K}$ pseudoorthoid, so kann es möglicherweise auch solche endliche Erweiterungen von $\mathfrak{K}$ geben, die nicht einfach sind. Der Grund hierfür liegt in folgendem Satze:

Ist $\mathfrak{K}$ ein orthoider Bereich und ist

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$$

eine solche rationale ganze Funktion mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$, die in $\mathfrak{K}$ irreduzibel ist, so ist der größte gemeinsame Teiler von $f(z)$ und dem Differentialquotienten $f'(z)$ von z frei. Ist hingegen $\mathfrak{K}$ ein pseudoorthoider Bereich, also ein Körper mit der Charakteristik p, so kann $f'(z)$ auch identisch verschwinden.

Ist eine rationale ganze Funktion $f(z)$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$ in diesem Körper irreduzibel und $f'(z)$ nicht identisch Null, so wird $f(z)$ eine Funktion *von der ersten Art* (in bezug auf $\mathfrak{K}$) genannt. Ist $\mathfrak{K}$ ein orthoider *Bereich, so ist jede aus $\mathfrak{K}$ entstammende irreduzible rationale ganze Funktion eine solche von der ersten Art.*

Ist $\mathfrak{L}$ eine algebraische Erweiterung von $\mathfrak{K}$, so wird jedes Element von $\mathfrak{L}$, in dessen Definitionsgleichung die linke Seite eine Funktion von der ersten Art ist, ein Element *von der ersten Art* genannt.

Ist in einer algebraischen Erweiterung von $\mathfrak{K}$ jedes Element von der ersten Art, so ist diese Erweiterung eine einfache.

Diejenigen Elemente einer Erweiterung $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{K}$, die von der ersten Art sind, bilden für sich einen Körper. D. h. die Summe und das Produkt von zwei Elementen erster Art sind wieder Elemente von der ersten Art.

Hat $\mathfrak{K}$ die Charakteristik p, und ist das Element α einer Erweiterung $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{K}$ *nicht* von der ersten Art, so kann zu α stets eine solche Potenz p^l von p gefunden werden, daß

$$\overline{\alpha} = \alpha^{p^l}$$

von der ersten Art ist. Wählen wir hier f möglichst klein, also so, daß $\alpha^{p^{f-1}}$ noch nicht von der ersten Art ist, dann erhalten wir die Definitionsgleichung von α in der Weise, daß wir in der Definitionsgleichung von α für z die p^f-te Potenz von z setzen.

§ 37. Jede solche Erweiterung von $\mathfrak{K}$, die zur Zerlegung einer aus $\mathfrak{K}$ entstammenden rationalen ganzen Funktion $f(z)$ gerade hinreicht, gehört zu denjenigen Erweiterungen, die als *normale* bezeichnet werden. Eine *algebraische* Erweiterung $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{K}$ wird eine normale genannt, wenn jede aus $\mathfrak{K}$ entstammende und in $\mathfrak{K}$ irreduzible rationale ganze Funktion $f(z)$, die in $\mathfrak{L}$ eine Nullstelle hat, daselbst in *lineare* Faktoren zerfällt.

§ 38. Nach einem mengentheoretischen Satze von *Zermelo* kann jede Menge wohlgeordnet werden. Mit Benutzung dieses Satzes hat *Steinitz* bewiesen, daß jeder Körper $\mathfrak{K}$ entweder schon selbst algebraisch abgeschlossen ist oder aber einer solchen algebraischen Erweiterung fähig ist, daß der erweiterte Körper algebraisch abgeschlossen ist.

Vom algebraischen Standpunkte aus hat $\mathfrak{K}$ im wesentlichen nur eine solche Erweiterung. D. h. wenn $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ zwei solche algebraische Erweiterungen von $\mathfrak{K}$ bedeuten, die beide algebraisch abgeschlossen sind, so sind $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ vom algebraischen Standpunkte aus äquivalente Erweiterungen des Körpers $\mathfrak{K}$.

Ist $\bar{\mathfrak{K}}$ eine algebraisch abgeschlossene Erweiterung von $\mathfrak{K}$, so ist jede andere algebraische Erweiterung von $\mathfrak{K}$ entweder mit $\bar{\mathfrak{K}}$ oder mit einem echten Teile von $\bar{\mathfrak{K}}$ äquivalent.

Die Bewertung normaler Erweiterungen von perfekten bewerteten Körpern.

§ 39. Nunmehr sei $\mathfrak{K}$ ein perfekter bewerteter Körper. $\bar{\mathfrak{K}}$ bedeute eine normale Erweiterung von $\mathfrak{K}$, die insbesondere auch die algebraisch abgeschlossene Erweiterung von $\mathfrak{K}$ sein kann. Wir wollen zeigen, daß die Bewertung von $\mathfrak{K}$ eine ganz bestimmte Bewertung von $\bar{\mathfrak{K}}$ erzeugt, wenn wir festsetzen, daß bei der Bewertung von $\bar{\mathfrak{K}}$ die Elemente von $\mathfrak{K}$ ihre ursprüngliche Bewertung behalten und solche Elemente von $\bar{\mathfrak{K}}$, die dieselbe Definitionsgleichung befriedigen, *gleiche Bewertung* haben.

Befriedigt das Element α des Körpers $\bar{\mathfrak{K}}$ die Definitionsgleichung

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

und sollen sämtliche Wurzeln dieser Gleichung dieselbe Bewertung haben, so kann diese Bewertung zufolge des Postulates

$$\|\alpha\beta\| = \|\alpha\|\|\beta\|$$

nur diese sein:

$$\|\alpha\| = \|a_n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Es ist aber zweifelhaft, ob wir durch die Festsetzung $\|\alpha\| = \|a\|^{\frac{1}{n}}$ überhaupt eine *Bewertung* erhalten. Mit anderen Worten, es muß noch bewiesen werden, daß nach dieser Festsetzung für jedes Element α von $\overline{\mathfrak{R}}$ in der Tat

$$\|1 + \alpha\| \leqq 1 + \|\alpha\|$$

und für irgend zwei Elemente

$$\|\alpha\beta\| = \|\alpha\|\|\beta\|.$$

Bei dem Beweise, daß unsere Festsetzung diesen beiden Forderungen tatsächlich entspricht, können wir die Annahme, daß $\overline{\mathfrak{R}}$ ein normaler Körper ist, ganz fallen lassen. Wir müssen aber dann beim Beweise mitunter auch solche Größen in Betracht ziehen, die nicht dem Körper $\overline{\mathfrak{R}}$, sondern einer anderen algebraischen Erweiterung von $\mathfrak{R}$ angehören, und denen ebenfalls nach der Formel

$$\|\alpha\| = \|a_n\|^{\frac{1}{n}}$$

eine Zahl $\|\alpha\|$ zugeordnet ist.

§ 40. Bei dem Beweise der Formel

$$\|\alpha\beta\| = \|\alpha\|\|\beta\|$$

wollen wir vorerst nur den Fall betrachten, daß α und β (in bezug auf $\mathfrak{R}$) *von der ersten Art* sind. Die Definitionsgleichung von α sei

$$z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m = 0,$$

diejenige von β sei

$$z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n = 0,$$

endlich diejenige von $\gamma = \alpha\beta$ sei

$$z^h + c_1 z^{h-1} + \cdots + c_h = 0.$$

Die zu beweisende Formel ist

$$\|a_m\|^{\frac{1}{m}}\|b_n\|^{\frac{1}{n}} = \|c_h\|^{\frac{1}{h}}.$$

Es ist das lediglich eine Gleichung zwischen Bewertungen solcher Größen, die dem Körper $\mathfrak{R}$ angehören. Ebendarum ist es gleichgültig,

welche Erweiterung von $\mathfrak{K}$ wir zum *Beweise* dieser Formel zu Hilfe ziehen. Wir wollen diejenige Erweiterung $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{K}$ benutzen, die gerade hinreicht zur Zerlegung von

$$(z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m)(z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n)$$

in lineare Faktoren.

Dieser Körper $\mathfrak{L}$ ist eine solche endliche normale Erweiterung von $\mathfrak{K}$, in welcher jedes Element von der ersten Art (in bezug auf $\mathfrak{K}$) ist. $\mathfrak{L}$ ist also zugleich eine einfache Erweiterung von $\mathfrak{K}$, d. h. es gibt in $\mathfrak{L}$ ein solches Element ϑ, daß jedes Element von $\mathfrak{L}$ eine rationale Funktion von ϑ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$ ist.

Die Definitionsgleichung von ϑ habe die folgenden Wurzeln:

$$\vartheta, \vartheta_1, \ldots \vartheta_{r-1}.$$

Drücken wir α als Funktion von ϑ aus, so haben wir $\alpha = \varphi(\vartheta)$. Desgleichen sei $\beta = \psi(\vartheta)$ und $\gamma = \alpha\beta = \chi(\vartheta)$.

Die Zahl r ist ein gemeinsames Vielfaches von m, n und h; ferner sind die Produkte

$$(z - \varphi(\vartheta))(z - \varphi(\vartheta_1)) \cdots (z - \varphi(\vartheta_{r-1})),$$
$$(z - \psi(\vartheta))(z - \psi(\vartheta_1)) \cdots (z - \psi(\vartheta_{r-1})),$$
$$(z - \chi(\vartheta))(z - \chi(\vartheta_1)) \cdots (z - \chi(\vartheta_{r-1}))$$

gleich der $\frac{r}{m}$-ten, $\frac{r}{n}$-ten resp. $\frac{r}{h}$-ten Potenz von

$$z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m,$$
$$z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n,$$
$$z^h + c_1 z^{h-1} + \cdots + c_h.$$

Es ist demnach

$$\varphi(\vartheta)\varphi(\vartheta_1) \cdots \varphi(\vartheta_{r-1}) = \pm a_m^{\frac{r}{m}},$$
$$\psi(\vartheta)\psi(\vartheta_1) \cdots \psi(\vartheta_{r-1}) = \pm b_n^{\frac{r}{n}},$$
$$\chi(\vartheta)\chi(\vartheta_1) \cdots \chi(\vartheta_{r-1}) = \pm c_h^{\frac{r}{h}}.$$

Ziehen wir noch in Betracht, daß

$$\chi(\vartheta) \cdots \chi(\vartheta_{r-1}) = \varphi(\vartheta)\psi(\vartheta) \cdots \varphi(\vartheta_{r-1})\psi(\vartheta_{r-1}),$$

so ist hieraus

$$\pm c_h^{\frac{r}{h}} = a_m^{\frac{r}{m}} b_n^{\frac{r}{n}},$$

also in der Tat

$$\|c_h\|^{\frac{1}{h}} = \|a_m\|^{\frac{1}{m}} \|b_n\|^{\frac{1}{n}}.$$

§ 41. Sind α, β und $\gamma = \alpha\beta$ *nicht von der ersten Art* (in bezug auf $\mathfrak{K}$), so bestimmen wir u, v, w so, daß

$$\bar{\alpha} = \alpha^{p^u},\ \bar{\beta} = \beta^{p^v},\ \bar{\gamma} = \gamma^{p^w}$$

von der ersten Art sind, und wählen dabei u, v, w möglichst niedrig.

Es ist dann

$$\bar{\gamma}^{p^{u+v}} = \bar{\alpha}^{p^{v+w}} \bar{\beta}^{p^{u+w}}.$$

Da für die Elemente erster Art $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ bereits die Gleichung

$$\|\bar{\alpha}\bar{\beta}\| = \|\bar{\alpha}\| \|\bar{\beta}\|$$

bewiesen ist, so haben wir

$$\|\bar{\gamma}\|^{p^{u+v}} = \|\bar{\alpha}\|^{p^{v+w}} \|\bar{\beta}\|^{p^{u+w}}$$

und hieraus

$$\|\bar{\gamma}\|^{\frac{1}{p^w}} = \|\bar{\alpha}\|^{\frac{1}{p^u}} \|\bar{\beta}\|^{\frac{1}{p^v}}. \tag{1.}$$

Hat nun $\bar{\alpha}$ die Definitionsgleichung

$$z^m + \cdots + a_m = 0,$$

so ist die Definitionsgleichung von α:

$$z^{mp^u} + \cdots + a_m = 0.$$

Es ist also zufolge unserer Festsetzung, die wir für $\|\alpha\|$ und $\|\bar{\alpha}\|$ machten:

$$\|\alpha\| = \|a_m\|^{\frac{1}{mp^u}} = \|\bar{\alpha}\|^{\frac{1}{p^u}}.$$

Ebenso ist

$$\|\beta\| = \|\bar{\beta}\|^{\frac{1}{p^v}},\quad \|\gamma\| = \|\bar{\gamma}\|^{\frac{1}{p^w}}.$$

Wird dies in der Formel (1.) in Betracht gezogen, so haben wir auch in diesem Falle:

$$\|\gamma\| = \|\alpha\| \|\beta\|.$$

§ 42. Um $\|\alpha\beta\| = \|\alpha\| \|\beta\|$ zu beweisen, brauchten wir von $\mathfrak{K}$ nur soviel vorauszusetzen, daß dies ein bewerteter Körper ist. Wollen wir aber auch

$$\|1 + \alpha\| \leqq 1 + \|\alpha\|$$

beweisen, so müssen wir auch die Voraussetzung benutzen, daß $\mathfrak{K}$ ein *perfekter* bewerteter Körper ist.

Um den Beweis ausführen zu können, müssen wir einige einfache und im Grunde allgemein bekannte Bemerkungen zu dem hinzufügen, was wir im vorigen Kapitel über Potenzreihen sagten.

Es bedeute

(1.) $$c_0 z^{-1} + c_1 z^{-2} + \cdots$$

eine Potenzreihe, deren Koeffizienten dem perfekten bewerteten Körper $\mathfrak{K}$ entnommen sind. Die *Cauchy*sche Konstante dieser Reihe sei l. Bedeutet nun t eine neue Variable und wird

$$\|t\| > 1 + l$$

vorausgesetzt, so ist zufolge der Ungleichheit

$$\|t - 1\| \geqq \|t\| - 1 > l$$

die Reihe

(2.) $$c_0 (t-1)^{-1} + c_1 (t-1)^{-2} + \cdots$$

absolut konvergent.

Hier ist (zufolge des § 32)

$$(t-1)^{-k-1} = t^{-k-1} + \binom{k+1}{1} t^{-k-2} + \binom{k+2}{2} t^{-k-3} + \cdots,$$

folglich ist die Reihe (2.) gleich der Doppelreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(t^{-k-1} + \binom{k+1}{k} t^{-k-2} + \binom{k+2}{k} t^{-k-3} + \cdots \right).$$

Diese Doppelreihe ist absolut konvergent. Wir dürfen also diejenigen Glieder, welche dieselbe Potenz von t enthalten, vereinigen. Wir erhalten so, *daß*

(3.) $$\sum_{m=0}^{\infty} \left(c_m + \binom{m}{m-1} c_{m-1} + \cdots + c_0 \right) t^{-m-1}$$

für $\|t\| > 1 + l$ *absolut konvergent und gleich der Reihe* (2.) *ist.*

Wenn $\mathfrak{K}$ den Körper der reellen Zahlen oder denjenigen der komplexen Zahlen bedeutet, so folgt bereits hieraus für die *Cauchy*sche Konstante l' der Reihe (3.) die Ungleichheit

$$l' \leqq 1 + l.$$

Für andere Körper ist aber diese Ungleichheit erst zu beweisen.

§ 43. Es seien nun die Koeffizienten von

$$\gamma_0 z^{-1} + \gamma_1 z^{-2} + \cdots$$

positive reelle Zahlen oder zum Teil gleich Null. Der Buchstabe z bedeute eine reelle Veränderliche. Als Bewertung diene der absolute Wert.

Nach dem vorangehenden Paragraphen ist dann die *Cauchy*sche Konstante von

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\gamma_m + \binom{m}{m-1} \gamma_{m-1} + \cdots + \gamma_0 \right) t^{-m-1}$$

größer oder gleich $1+\overline{\lim_{m=\infty}}\gamma_m^{\frac{1}{m}}$. Wir haben also in diesem Falle

$$(1.)\quad \overline{\lim_{m=\infty}}\left(\gamma_m+\binom{m}{m-1}\gamma_{m-1}+\cdots+\gamma_0\right)^{\frac{1}{m}}\leqq 1+\overline{\lim_{m=\infty}}\gamma_m^{\frac{1}{m}}.$$

Dies ist für jede Wahl der nicht negativen reellen Zahlen γ richtig.

Gehen wir nun zu einem beliebigen bewerteten Körper $\mathfrak{K}$ über und setzen statt der γ die Bewertungen von c, so ist

$$\left\|c_m+\binom{m}{m-1}c_{m-1}+\cdots+c_0\right\|\leqq\|c_m\|+\binom{m}{m-1}\|c_{m-1}\|+\cdots+\|c_m\|$$

und somit nach der Formel (1.)

$$(2.)\quad \overline{\lim_{m=\infty}}\left\|c_m+\binom{m}{m-1}c_{m-1}+\cdots+c_0\right\|^{\frac{1}{m}}\leqq 1+\overline{\lim_{m=\infty}}\|c_m\|^{\frac{1}{m}}.$$

Die im vorangehenden Paragraphen mit (3.) bezeichnete Reihe hat also stets eine solche *Cauchy*sche Konstante, die $\leqq 1+l$, wenn l die *Cauchy*sche Konstante der dortigen Reihe (1.) bedeutet.

§ 44. Es bedeute nunmehr α ein beliebiges Element der algebraischen Erweiterung $\overline{\mathfrak{K}}$ von $\mathfrak{K}$. Die Definitionsgleichung von α sei

$$f(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n=0.$$

Die linke Seite der Definitionsgleichung von $1+\alpha$ ist $f(t-1)$. Die ausführliche Gestalt dieser Funktion sei

$$f(t-1)=t^n+a_1't^{n-1}+\cdots+a_n'.$$

Es soll bewiesen werden, daß zwischen

$$\|\alpha\|=\|a_n\|^{\frac{1}{n}}\quad\text{und}\quad\|1+\alpha\|=\|a_n'\|^{\frac{1}{n}}$$

die Ungleichheit

$$\|a_n'\|^{\frac{1}{n}}\leqq 1+\|a_n\|^{\frac{1}{n}}$$

besteht.

Zwischen den *Cauchy*schen Konstanten von

$$\frac{1}{f(z)}=cz^{-1}+c_1z^{-2}+\cdots$$

und

$$\frac{1}{f(t-1)}=c_0't^{-1}+c_1't^{-2}+\cdots$$

fanden wir soeben die Ungleichheit

$$\overline{\lim_{m=\infty}}\|c_m'\|^{\frac{1}{m}}\leqq 1+\overline{\lim_{m=\infty}}\|c_m\|^{\frac{1}{m}}.$$

Da $f(z)$ und $f(t-1)$ in $\Re$ irreduzibel sind, haben wir nach § 33

$$\overline{\lim_{m=\infty}} \|c_m\|^{\frac{1}{m}} = \|a_n\|^{\frac{1}{n}}, \quad \overline{\lim_{m=\infty}} \|c'_m\|^{\frac{1}{n}} = \|a'_n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Es ist also in der Tat

$$\|a'_n\|^{\frac{1}{n}} \leqq 1 + \|a_n\|^{\frac{1}{n}}.$$

§ 45. Der Körper $K(p)$ der p-adischen rationalen Zahlen ist ein perfekter bewerteter Körper. Die soeben ausgeführten Untersuchungen befähigen uns also dazu, daß wir jede algebraische Erweiterung von $K(p)$ bewerten können. Die Größen jeder solchen Erweiterung werden *p-adische algebraische Zahlen* genannt.

Ist die betrachtete algebraische Erweiterung $\overline{\Re}$ endlich, so gibt es in dieser Erweiterung immer eine Größe π, daß $\|\pi\| < 1$ ist und für jede andere Größe α der Erweiterung

$$\|\alpha\| = \|\pi\|^m$$

wird, wo m eine rationale *ganze* Zahl ist, die sowohl positiv als auch negativ oder Null sein kann. Dieser Exponent m wird die Ordnung von α in bezug auf π genannt und spielt in der *Hensel*schen Theorie der p-adischen algebraischen Zahlen eine fundamentale Rolle.

Herr *Hensel* kommt zu dem Begriffe der Ordnung in bezug auf π natürlich nicht mittels der *Hadamard*schen Sätze, sondern seiner viel einfacheren Untersuchungen über die Zerlegung der ganzen Funktionen in $K(p)$.

Ich glaube, daß auch in *allen* anderen Fällen die Sätze über die Bewertung der algebraischen Erweiterungen mittels solcher Methoden bewiesen werden können, die den *Hensel*schen Überlegungen etwas näher stehen, als die von mir benutzten. Ich selbst habe aber vergebens nach einer größeren Annäherung gestrebt.

V. Der Fundamentalsatz der Bewertungstheorie.

Der derivierte Körper eines algebraisch abgeschlossenen, bewerteten Körpers.

§ 46. Wir wollen in diesem Kapitel beweisen, daß *der derivierte Körper eines algebraisch abgeschlossenen, bewerteten Körpers wieder algebraisch abgeschlossen ist.*

Damit ist der Beweis *des Fundamentalsatzes, daß jeder bewertete Körper* $\mathfrak{K}$ *zu einem perfekten, algebraisch abgeschlossenen, bewerteten Körper erweitert werden kann,* gänzlich erledigt.

Wir können nämlich $\mathfrak{K}$ zu einem perfekten bewerteten Körper $\mathfrak{K}'$ ergänzen. Diesen können wir zu einem algebraisch abgeschlossenen, bewerteten Körper $\bar{\mathfrak{K}}$ erweitern. Der derivierte Körper von $\bar{\mathfrak{K}}$ wird schließlich allen unseren Forderungen gleichzeitig genügen.

§ 47. Es sei $\mathfrak{K}$ ein algebraisch abgeschlossener, bewerteter Körper und $\mathfrak{K}'$ sein derivierter Körper. Wir haben zu beweisen, daß *jede rationale ganze Funktion*

$$F(z) = z^n + A_1 z^{n-1} + \cdots + A_n,$$

deren Koeffizienten $\mathfrak{K}'$ *entnommen sind, in* $\mathfrak{K}'$ *in lineare Faktoren zerfällt.*

Wir wollen uns vorerst auf den Fall beschränken, daß die Diskriminante von $F(z)$ nicht Null ist.

Wählen wir in diesem Falle δ *hinlänglich klein und bilden sodann eine Funktion*

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n,$$

deren Koeffizienten dem algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathfrak{K}$ *entnommen sind und die Ungleichheiten*

$$\|a_1 - A_1\| < \delta, \ldots \|a_n - A_n\| < \delta$$

befriedigen, so können wir aus der in $\mathfrak{K}$ *stets ausführbaren Zerlegung*

$$f(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n)$$

in folgender Weise die Zerlegung von $F(z)$ *in* $\mathfrak{K}'$ *erhalten:*

Wir bilden die n Folgen

$$\alpha_\nu, \alpha_\nu', \alpha_\nu'', \ldots \alpha_\nu^{(k)}, \alpha_\nu^{(k+1)}, \ldots, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

in denen $\alpha_\nu^{(k+1)}$ *nach der Rekursionsformel*

$$\alpha_\nu^{(k+1)} = \alpha_\nu^{(k)} - \frac{F(\alpha_\nu^{(k)})}{(\alpha_\nu^{(k)} - \alpha_1^{(k)}) \cdots (\alpha_\nu^{(k)} - \alpha_{\nu-1}^{(k)})(\alpha_\nu^{(k)} - \alpha_{\nu+1}^{(k)}) \cdots (\alpha_\nu^{(k)} - \alpha_n^{(k)})}$$

zu berechnen ist. Die so gebildeten Folgen sind Fundamentalreihen. Bezeichnen wir ihre Limes in $\mathfrak{K}'$ *mit*

$$\gamma_1, \cdots \gamma_\nu, \cdots \gamma_n,$$

so ist

$$F(z) = (z - \gamma_1) \cdots (z - \gamma_n).$$

Wie die positive Zahl δ zu bestimmen ist, das hat *Weierstraß* in § 1 seiner in der Einleitung zitierten Abhandlung angegeben. Seine Unter-

suchungen beziehen sich zwar nur auf den Fall, daß $\mathfrak{K}$ die Gesamtheit der algebraischen Zahlen bedeutet und als Bewertung der absolute Wert gilt; sie können aber in jedem anderen Falle wiederholt werden.

§ 48. Ist die Diskriminante von $F(z)$ gleich Null, so kann $F(z)$ im allgemeinen in bekannter Weise in solche Faktoren zerlegt werden, deren Diskriminanten von Null verschieden sind, die wir also bereits in lineare zerfällen können. Dieses Verfahren versagt nur dann, wenn $\mathfrak{K}$ ein pseudoorthoider Bereich ist, also die Charakteristik p hat, und der Differentialquotient von $F(z)$ identisch verschwindet. In diesem Falle enthält $F(z)$ die Veränderliche z nur in der Verbindung z^p, d. h. es ist

$$F(z) = G(z^p),$$

wo $G(z)$ wieder eine rationale ganze Funktion ist.

Daß $F(z)$ auch in diesem Falle in lineare Faktoren zerfällt werden kann, das läßt sich in der folgenden Weise einsehen.

Wir können voraussetzen, daß wir jede rationale ganze Funktion, die von niedrigerem Grade ist als $F(z)$, bereits zerfällen können. Also unter anderem auch die Funktion $G(z)$. Wir können also $F(z)$ so schreiben:

$$F(z) = (z^p - C_1)(z^p - C_2) \cdots (z^p - C_r),$$

und brauchen nur noch die Funktionen von der Gestalt $z^p - C$ in lineare Faktoren zu zerlegen.

C kann jedenfalls so geschrieben werden:

$$C = c_0 + c_1 + \cdots + c_m + \cdots,$$

wo die c dem Körper $\mathfrak{K}$ entnommen sind und für große m die Ungleichheit

$$\|c_0 + c_1 + \cdots + c_m - C\| < \frac{1}{2^{p^m+1}}$$

besteht. Es ist dann

$$\|c_{m+1}\| = \|c_0 + c_1 + \cdots + c_m - C - (c_0 + c_1 + \cdots + c_{m+1} - C)\|$$
$$< \frac{1}{2^{p^m+1}} + \frac{1}{2^{p^m+2}} < \frac{1}{2^{p^m}}.$$

Da $\mathfrak{K}$ algebraisch abgeschlossen ist, so können wir in diesem Körper immer u_m so bestimmen, daß

$$u_m^p = c_m.$$

Es wird dann

$$U = u_0 + u_1 + \cdots + u_m + \cdots$$

eine absolut konvergente Reihe sein. Des weiteren ist, da $\mathfrak{K}$ die Charakteristik p hat, in diesem Körper

$$(u_0 + u_1 + \cdots + u_m)^p = u_0^p + u_1^p + \cdots + u_m^p$$
$$= c_0 + c_1 + \cdots + c_m.$$

Es ist demnach

$$U^p = C$$

und somit

$$z^p - C = (z - U)^p.$$

§ 49. Erweitern wir den Körper $K(p)$ der p-adischen rationalen Zahlen durch Adjunktion p-adischer *algebraischer* Zahlen zu einem möglichst kleinen algebraisch abgeschlossenen, bewerteten Körper, so ist es wahrscheinlich, daß dieser Körper nicht perfekt ist. Sein derivierter Körper wird aber jedenfalls ein algebraisch abgeschlossener, perfekter bewerteter Körper sein.

Es wäre sehr erwünscht zu entscheiden, ob die kleinste algebraisch abgeschlossene Erweiterung von $K(p)$ in der Tat, wie ich meine, einen von ihr verschiedenen derivierten Körper besitzt, oder aber schon in sich perfekt ist.

Über lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhängig Variable reell ist.

(Erste Mitteilung.)

Von Herrn *Oskar Perron* in Tübingen.

Einleitung. Die Integration der linearen Differentialgleichung mit *konstanten* Koeffizienten

$$\text{(A.)} \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n y = 0$$

hängt bekanntlich ab von der algebraischen Gleichung

$$\varrho^n + a_1 \varrho^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$

Hat diese insbesondere nur einfache Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$, so bilden die Funktionen

$$y_1 = e^{\varrho_1 x}, \; y_2 = e^{\varrho_2 x}, \; \ldots \; y_n = e^{\varrho_n x}$$

ein Fundamentalsystem von Integralen. Bezeichnet man mit $\Re(\varrho)$ den reellen Teil von ϱ und ist etwa

$$\Re(\varrho_1) > \Re(\varrho_2) > \cdots > \Re(\varrho_n),$$

so gilt die Gleichung

$$\frac{y_\lambda'}{y_\lambda} = \varrho_\lambda \qquad \left(y_\lambda' = \frac{dy_\lambda}{dx}\right), \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

und für jedes Integral y der Form

$$y = c_\lambda y_\lambda + c_{\lambda+1} y_{\lambda+1} + \cdots + c_n y_n \qquad (c_\lambda \neq 0)$$

ist immer noch

$$\lim_{x=\infty} \frac{y'}{y} = \varrho_\lambda.$$

Für das *allgemeine* Integral ist insbesondere $\lim\limits_{x=\infty} \frac{y'}{y} = \varrho_1$; dagegen findet die Gleichung $\lim\limits_{x=\infty} \frac{y'}{y} = \varrho_n$ nur für ein einziges Integral (von einem konstanten Faktor abgesehen) statt.

Wir untersuchen im folgenden unter anderem die Differentialgleichung mit *variablen* Koeffizienten

$$\text{(B.)} \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + f_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + f_n(x)\,y = 0,$$

wobei aber

$$\lim_{x=\infty} f_\lambda(x) = a_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

sein soll. Da die Gleichung (B.) für $x = \infty$ gewissermaßen in (A.) übergeht, wird man vermuten, daß auch ihre Integrale im Unendlichen ein ähnliches Verhalten zeigen, und in der Tat hat *Poincaré**) bewiesen, daß für das allgemeine Integral wieder $\lim_{x=\infty} \frac{y'}{y} = \varrho_1$ ist, und daß es andererseits für jede Wurzel ϱ_λ auch Partikulärintegrale gibt, für welche $\lim_{x=\infty} \frac{y'}{y} = \varrho_\lambda$ ist. Der *Poincaré*sche Beweis ist sehr kompliziert und ist außerdem an die wesentliche Voraussetzung geknüpft, daß die Koeffizienten $f_\lambda(x)$ *rationale* Funktionen sind. Ich werde im folgenden einen von dieser Voraussetzung freien und dabei viel einfacheren und naturgemäßeren Beweis mitteilen. Zugleich werden für etwas allgemeinere Systeme von Differentialgleichungen ähnliche Fragen erörtert.

§ 1.

Die verschiedenen Existenzbeweise für Integrale von gewöhnlichen Differentialgleichungen liefern diese Integrale im allgemeinen nur in einem sehr kleinen Bereich, dessen Größe wesentlich von den Anfangsbedingungen (Integrationskonstanten) abhängt. Bei den *linearen* Differentialgleichungen aber leisten sie mehr. Beispielsweise liefert die *Picard*sche Approximationsmethode mit der von *Lindelöf* herrührenden Verfeinerung die Integrale in jedem Intervall, in dem die Koeffizienten stetig sind. Da auch der Eindeutigkeitsbeweis bei linearen Differentialgleichungen keinerlei Schwierigkeiten macht, so können wir den folgenden Satz als bekannt an die Spitze stellen (vgl. z. B. *É. Goursat*: Cours d'analyse mathématique, tome II, chap. 19):

Die Koeffizienten des Systems von n linearen Differentialgleichungen

$$y_\lambda' = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\lambda,\mu}(x)\,y_\mu \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

mögen im Intervall $a \leqq x \leqq b$ *stetige Funktionen von* x *sein; sie dürfen auch komplexe Werte annehmen. Dann gilt erstens das*

---

*) Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies. American journal of mathematics, vol. 7, 1885.

Existenztheorem: Es gibt ein im ganzen Intervall stetiges System von Integralen $y_1, y_2, \dots y_n$, welche an einer Stelle x_1 des Intervalles vorgegebene Werte annehmen. Zweitens das

Eindeutigkeitstheorem: Wenn $y_1, y_2, \dots y_n$ an der Stelle x_1 sämtlich verschwinden, so verschwinden sie im ganzen Intervall.

§ 2.

Wir betrachten jetzt das System von Differentialgleichungen

$$(1.) \qquad y_\lambda' = f_\lambda(x) y_\lambda + \sum_{\mu=1}^{n} \varphi_{\lambda,\mu}(x) y_\mu, \qquad (\lambda = 1, 2, \dots n)$$

wobei wir von den Koeffizienten $f_\lambda(x)$, $\varphi_{\lambda,\mu}(x)$ voraussetzen, daß sie für $x \geqq x_0$ stetig sind und daß

$$(2.) \qquad \Re(f_1) > \Re(f_\lambda) + c, \qquad (\lambda = 2, 3, \dots n)$$

$$(3.) \qquad \lim_{x=\infty} \varphi_{\lambda,\mu}(x) = 0$$

ist, wo c eine gewisse positive Zahl. Dann gilt

Satz 1. *Die Differentialgleichungen* (1.) *haben bei den gemachten Voraussetzungen ein System von Integralen $y_1, y_2, \dots y_n$, für welches*

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_\lambda}{y_1} = 0, \qquad (\lambda = 2, 3, \dots n)$$

$$\lim_{x=\infty} \left(\frac{y_1'}{y_1} - f_1 \right) = 0$$

ist. Es gibt sogar n linear unabhängige Integralsysteme dieser Art.

Beweis. Es sei x_1 irgendeine Zahl größer als x_0, ferner $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n$ beliebige Zahlen, welche den Ungleichungen

$$(4.) \qquad |\eta_1| > |\eta_\lambda| \qquad (\lambda = 2, 3, \dots n)$$

genügen. Nach dem Existenztheorem gibt es ein für $x \geqq x_0$ existierendes System von Integralen, für welche

$$(5.) \qquad y_\lambda(x_1) = \eta_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \dots n)$$

ist. Wir werden zeigen, daß dieses Integralsystem, wenn nur x_1 genügend groß gewählt wurde, die in Satz 1 behaupteten Eigenschaften hat. Daß es sogar n linear unabhängige Integralsysteme dieser Art gibt, ist dann evident, da man ja der Forderung (4.) auf n unabhängige Arten Genüge leisten kann.

Wir bezeichnen in der Folge allgemein mit $\bar{z}$ die zu z konjugiert-komplexe Größe. Multipliziert man dann Gleichung (1.) mit $\bar{y}_\lambda$, so kommt:

$$\bar{y}_\lambda y'_\lambda = f_\lambda |y_\lambda|^2 + \sum_{\mu=1}^{n} \varphi_{\lambda,\mu} \bar{y}_\lambda y_\mu .$$

Daher ist gewiß

$$\left| \Re(\bar{y}_\lambda y'_\lambda) - \Re(f_\lambda) |y_\lambda|^2 \right| \leqq \sum_{\mu=1}^{n} |\varphi_{\lambda,\mu} \bar{y}_\lambda y_\mu| ,$$

wofür man auch schreiben kann:

$$(6.) \qquad -\sum_{\mu=1}^{n} |\varphi_{\lambda,\mu} y_\lambda y_\mu| \leqq \frac{1}{2} \frac{d}{dx} |y_\lambda|^2 - \Re(f_\lambda) |y_\lambda|^2 \leqq \sum_{\mu=1}^{n} |\varphi_{\lambda,\mu} y_\lambda y_\mu| .$$

Ist x_1 genügend groß gewählt, so wird wegen (3.) für $x \geqq x_1$

$$|\varphi_{\lambda,\mu}(x)| \leqq \frac{c}{2n},$$

so daß aus (6.) folgt:

$$(7.) \qquad -\frac{c}{2n} \sum_{\mu=1}^{n} |y_\lambda y_\mu| \leqq \frac{1}{2} \frac{d}{dx} |y_\lambda|^2 - \Re(f_\lambda) |y_\lambda|^2 \leqq \frac{c}{2n} \sum_{\mu=1}^{n} |y_\lambda y_\mu| .$$

Nun ist nach (4.) und (5.) an der Stelle $x = x_1$

$$(8.) \qquad |y_1|^2 > |y_\lambda|^2, \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots n)$$

und wir wollen zunächst beweisen, daß diese Ungleichungen auch für $x > x_1$ dauernd bestehen bleiben. In der Tat, nehmen wir an, das wäre nicht der Fall, so sei x_2 die untere Grenze derjenigen $x (> x_1)$, für welche (8.) nicht gilt. Dann ist offenbar für einen gewißen Index k:

$$(9.) \qquad \begin{cases} |y_1(x_2)|^2 = |y_k(x_2)|^2 \geqq |y_\lambda(x_2)|^2 & (\text{für } \lambda \neq 1, k), \\ \dfrac{d}{dx} |y_1|^2_{x=x_2} \leqq \dfrac{d}{dx} |y_k|^2_{x=x_2} . \end{cases}$$

Dabei ist sicher $y_1(x_2) \neq 0$; denn anderenfalls wäre ja $y_\lambda(x_2) = 0$ für $\lambda = 1, 2, \ldots n$, so daß nach dem Eindeutigkeitstheorem die y_λ überall verschwinden müßten, während nach (8.) doch $y_1(x_1) \neq 0$ ist.

Aus (7.) und (9.) folgt nun für die Stelle $x = x_2$:

$$\Re(f_1) |y_1|^2 - \frac{c}{2} |y_1|^2 \leqq \frac{1}{2} \frac{d}{dx} |y_1|^2 \leqq \frac{1}{2} \frac{d}{dx} |y_k|^2 \leqq \Re(f_k) |y_1|^2 + \frac{c}{2} |y_1|^2 ;$$

also auch, weil $y_1 \neq 0$ ist,

$$\Re(f_1) - \frac{c}{2} \leqq \Re(f_k) + \frac{c}{2} ,$$

im Widerspruch mit (2.).

Damit sind die Ungleichungen (8.) für $x \geqq x_1$ bewiesen. Um nun zu zeigen, daß sogar

$$\lim_{x=\infty} \left| \frac{y_\lambda}{y_1} \right| = 0$$

ist, nehmen wir an, es sei im Gegenteil für einen gewissen Index $\lambda (> 1)$

$$\limsup_{x=\infty} \left|\frac{y_\lambda}{y_1}\right|^2 = \alpha > 0.$$

Dann gibt es beliebig große Werte von x, für welche

$$\text{(10.)} \qquad \left|\frac{y_\lambda}{y_1}\right|^2 > \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{d}{dx}\left|\frac{y_\lambda}{y_1}\right|^2 > -\frac{c\alpha}{2}$$

ist. Um das einzusehen, beachte man, daß nicht von einem gewissen x an dauernd $\frac{d}{dx}\left|\frac{y_\lambda}{y_1}\right|^2 \leqq -\frac{c\alpha}{2}$ sein kann, weil daraus $\lim_{x=\infty}\left|\frac{y_\lambda}{y_1}\right|^2 = -\infty$ folgen würde, was unmöglich ist. Wenn also für alle hinreichend großen x stets $\left|\frac{y_\lambda}{y_1}\right|^2 > \frac{\alpha}{2}$ wird, so ist die Sache bewiesen. Wenn es aber beliebig große Werte von x gibt, für welche $\left|\frac{y_\lambda}{y_1}\right|^2 \leqq \frac{\alpha}{2}$ ist, so sei etwa $x = \xi$ ein solcher Wert. Da $\limsup_{x=\infty}\left|\frac{y_\lambda}{y_1}\right|^2 = \alpha$, so muß es dann unter allen Zahlen x, die größer sind als ξ, eine kleinste geben, für die $\left|\frac{y_\lambda}{y_1}\right|^2 = \frac{3\alpha}{4}$ ist. Für dieses x wird aber jedenfalls $\frac{d}{dx}\left|\frac{y_\lambda}{y_1}\right|^2 \geqq 0$; also ist dort

$$\left|\frac{y_\lambda}{y_1}\right|^2 = \frac{3\alpha}{4} > \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{d}{dx}\left|\frac{y_\lambda}{y_1}\right|^2 \geqq 0 > -\frac{c\alpha}{2}.$$

Damit ist gezeigt, daß die Ungleichungen (10.) für gewisse beliebig große x gelten.

Nun ist aber

$$\frac{d}{dx}\left|\frac{y_\lambda}{y_1}\right|^2 = \frac{1}{|y_1|^2}\frac{d}{dx}|y_\lambda|^2 - \frac{|y_\lambda|^2}{|y_1|^4}\frac{d}{dx}|y_1|^2,$$

so daß man aus (6.) sogleich erhält:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left|\frac{y_\lambda}{y_1}\right|^2 + \Re(f_1 - f_\lambda)\cdot\left|\frac{y_\lambda}{y_1}\right|^2 \leqq \sum_{\mu=1}^{n}\left|\frac{\varphi_{\lambda,\mu} y_\lambda y_\mu}{y_1^2}\right| + \sum_{\mu=1}^{n}\left|\frac{\varphi_{1,\mu} y_1 y_\mu y_\lambda^2}{y_1^4}\right|$$

$$\leqq \sum_{\mu=1}^{n}|\varphi_{\lambda,\mu}| + \sum_{\mu=1}^{n}|\varphi_{1,\mu}| \quad \text{(wegen (8.))};$$

daher mit Rücksicht auf (2.) und (10.):

$$-\frac{c\alpha}{4} + c\,\frac{\alpha}{2} < \sum_{\mu=1}^{n}|\varphi_{\lambda,\mu}| + \sum_{\mu=1}^{n}|\varphi_{1,\mu}|.$$

Diese Ungleichung steht aber, da sie für gewisse beliebig große x gilt, im Widerspruch mit (3.). Sonach muß in der Tat

$$\lim_{x=\infty}\frac{y_\lambda}{y_1} = 0 \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots n)$$

sein. Aus der Gleichung (1.) für $\lambda = 1$ folgt dann ohne weiteres auch

$$\lim_{x=\infty}\left(\frac{y_1'}{y_1}-f_1\right)=0,$$

womit Satz 1 vollständig bewiesen ist.

§ 3.

Wir betrachten wieder das System von Differentialgleichungen

$$y_\lambda'=f_\lambda(x)\,y_\lambda+\sum_{\mu=1}^{n}\varphi_{\lambda,\mu}(x)\,y_\mu. \qquad (\lambda=1,2,\dots n) \tag{11.}$$

Die Koeffizienten $f_\lambda, \varphi_{\lambda,\mu}$ sollen aber jetzt für $x \geqq x_0$ stetig sein und den weitergehenden Bedingungen genügen:

$$\Re(f_\lambda) > \Re(f_{\lambda+1})+c, \qquad (\lambda=1,2,\dots n-1) \tag{12.}$$

$$\lim_{x=\infty}\varphi_{\lambda,\mu}(x)=0, \tag{13.}$$

wo c eine positive Zahl ist. Dann gilt

Satz 2. *Die Differentialgleichungen* (11.) *haben unter den angegebenen Voraussetzungen n linear unabhängige Integralsysteme*

$$y_1=y_{1,\lambda},\ y_2=y_{2,\lambda},\ \cdots y_n=y_{n,\lambda}, \qquad (\lambda=1,2,\dots n)$$

für welche die Beziehungen gelten:

$$\lim_{x=\infty}\frac{y_{\mu,\lambda}}{y_{\lambda,\lambda}}=0, \qquad (\mu\neq\lambda)$$

$$\lim_{x=\infty}\left(\frac{y_{\lambda,\lambda}'}{y_{\lambda,\lambda}}-f_\lambda\right)=0.$$

Beweis. Nach Satz 1 existiert ein Integralsystem

$$y_1=y_{1,1},\ y_2=y_{2,1},\ \cdots y_n=y_{n,1},$$

für welches

$$\lim_{x=\infty}\frac{y_{\mu,1}}{y_{1,1}}=0, \qquad (\mu=2,3,\dots n) \tag{14.}$$

$$\lim_{x=\infty}\left(\frac{y_{1,1}'}{y_{1,1}}-f_1\right)=0 \tag{15.}$$

ist. Wir setzen dann

$$\left\{\begin{aligned} y_1&=y_{1,1}\int u\,dx,\\ y_2&=y_{2,1}\int u\,dx+z_1,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_n&=y_{n,1}\int u\,dx+z_{n-1}, \end{aligned}\right. \tag{16.}$$

wodurch (11.) übergeht in:

$$y'_{1,1}\int u\,dx + y_{1,1}u = f_1 y_{1,1}\int u\,dx + \sum_{\mu=1}^{n}\varphi_{1,\mu}y_{\mu,1}\int u\,dx + \sum_{\mu=2}^{n}\varphi_{1,\mu}z_{\mu-1},$$

$$y'_{\lambda,1}\int u\,dx + y_{\lambda,1}u + z'_{\lambda-1} = f_\lambda y_{\lambda,1}\int u\,dx + f_\lambda z_{\lambda-1} + \sum_{\mu=1}^{n}\varphi_{\lambda,\mu}y_{\mu,1}\int u\,dx$$

$$+ \sum_{\mu=2}^{n}\varphi_{\lambda,\mu}z_{\mu-1}. \qquad (\lambda=2,3,\dots n)$$

Hier fallen aber, da $y_{\lambda,1}$ ein Integralsystem von (11.) ist, die Glieder mit dem Faktor $\int u\,dx$ gerade heraus, und es ergibt sich:

(17.) $$y_{1,1}u = \sum_{\mu=2}^{n}\varphi_{1,\mu}z_{\mu-1},$$

(18.) $$y_{\lambda,1}u + z'_{\lambda-1} = f_\lambda z_{\lambda-1} + \sum_{\mu=2}^{n}\varphi_{\lambda,\mu}z_{\mu-1}. \qquad (\lambda=2,3,\dots n)$$

Setzt man u aus (17.) in (18.) ein, so kommt schließlich:

(19.) $$z'_{\lambda-1} = f_\lambda z_{\lambda-1} + \sum_{\mu=2}^{n}\left(\varphi_{\lambda,\mu} - \frac{y_{\lambda,1}}{y_{1,1}}\varphi_{1,\mu}\right)z_{\mu-1}. \qquad (\lambda=2,3,\dots n)$$

Hier haben die Koeffizienten unter dem Summenzeichen wegen (13.) und (14.) den Grenzwert Null. Daher erfüllen die Differentialgleichungen (19.) die gleichen Voraussetzungen wie (11.); nur ist n ersetzt durch $n-1$ (und x_0 eventuell durch einen größeren Wert). Für sie können wir infolgedessen den Satz 2 als bewiesen annehmen (für $n=1$ ist er ja evident), so daß es $n-1$ linear unabhängige Integralsysteme

$$z_1 = z_{1,\lambda},\ z_2 = z_{2,\lambda},\ \dots\ z_{n-1} = z_{n-1,\lambda} \qquad (\lambda=1,2,\dots n-1)$$

gibt, für welche

(20.) $$\lim_{x=\infty}\frac{z_{\mu,\lambda}}{z_{\lambda,\lambda}} = 0, \qquad (\mu\neq\lambda)$$

(21.) $$\lim_{x=\infty}\left(\frac{z'_{\lambda,\lambda}}{z_{\lambda,\lambda}} - f_{\lambda+1}\right) = 0 \qquad (\lambda=1,2,\dots n-1)$$

ist. Bezeichnet man die vermöge (17.) zu $z_{1,\lambda}, z_{2,\lambda}, \dots z_{n-1,\lambda}$ gehörige Funktion u mit u_λ, also

$$y_{1,1}u_\lambda = \sum_{\mu=2}^{n}\varphi_{1,\mu}z_{\mu-1,\lambda},$$

so folgt wegen (13.) und (20.):

(22.) $$\lim_{x=\infty}\frac{y_{1,1}}{z_{\lambda,\lambda}}u_\lambda = 0.$$

Nun ist nach (15.) und (21.)

$$\frac{y'_{1,1}}{y_{1,1}} = f_1 + \varepsilon_1, \quad \frac{z'_{\lambda,\lambda}}{z_{\lambda,\lambda}} = f_{\lambda+1} + \varepsilon_{\lambda+1},$$

wobei

$$\lim_{x=\infty} \varepsilon_1 = 0, \quad \lim_{x=\infty} \varepsilon_{\lambda+1} = 0.$$

Daher durch Integration

$$y_{1,1} = C_1 e^{\int_a^x (f_1+\varepsilon_1)\,dx}, \qquad (C_1 \neq 0)$$

$$z_{\lambda,\lambda} = C_{\lambda+1} e^{\int_a^x (f_{\lambda+1}+\varepsilon_{\lambda+1})\,dx}. \qquad (C_{\lambda+1} \neq 0)$$

Also auch

$$(23.) \qquad \left|\frac{z_{\lambda,\lambda}}{y_{1,1}}\right| = \left|\frac{C_{\lambda+1}}{C_1}\right| e^{-\int_a^x \Re(f_1+\varepsilon_1-f_{\lambda+1}-\varepsilon_{\lambda+1})\,dx} < \left|\frac{C_{\lambda+1}}{C_1}\right| e^{-\int_a^x [c+\Re(\varepsilon_1-\varepsilon_{\lambda+1})]\,dx}.$$

Folglich existiert das Integral $\int_a^\infty \left|\frac{z_{\lambda,\lambda}}{y_{1,1}}\right| dx$ und somit wegen (22.) erst recht das Integral $\int_a^\infty u_\lambda\,dx$. Mit Rücksicht auf (16.) haben daher die Gleichungen (11.) insbesondere auch die folgenden $n-1$ partikulären Integralsysteme:

$$(24.) \qquad \begin{cases} y_{1,\lambda+1} = y_{1,1} \int_\infty^x u_\lambda\,dx, \\ y_{2,\lambda+1} = y_{2,1} \int_\infty^x u_\lambda\,dx + z_{1,\lambda}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n,\lambda+1} = y_{n,1} \int_\infty^x u_\lambda\,dx + z_{n-1,\lambda}. \end{cases} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n-1)$$

Wir zeigen jetzt, daß diese gerade die in Satz 2 behaupteten Eigenschaften haben. Es ist nämlich

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_{1,\lambda+1}}{z_{\lambda,\lambda}} = \lim_{x=\infty} \frac{\int_\infty^x u_\lambda\,dx}{\frac{z_{\lambda,\lambda}}{y_{1,1}}}.$$

Da auf der rechten Seite Zähler und Nenner den Grenzwert Null haben (vgl. (23.)), so kann man den Grenzwert des Bruches berechnen, indem man Zähler und Nenner differenziert; es kommt

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_{1,\lambda+1}}{z_{\lambda,\lambda}} = \lim_{x=\infty} \frac{u_\lambda}{\frac{d}{dx}\left(\frac{z_{\lambda,\lambda}}{y_{1,1}}\right)} = \lim_{x=\infty} \frac{\frac{y_{1,1}}{z_{\lambda,\lambda}} u_\lambda}{\frac{z'_{\lambda,\lambda}}{z_{\lambda,\lambda}} - \frac{y'_{1,1}}{y_{1,1}}}.$$

Hier hat der Zähler nach (22.) den Grenzwert Null. Der Nenner aber unterscheidet sich nach (15.) und (21.) beliebig wenig von $f_{\lambda+1} - f_1$,

bleibt also wegen (12.) absolut über einer positiven Schranke. Man erhält daher:

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_{1,\lambda+1}}{z_{\lambda,\lambda}} = 0. \tag{25.}$$

Für $\mu > 1$ ist dagegen

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_{\mu,\lambda+1}}{z_{\lambda,\lambda}} = \lim_{x=\infty} \frac{y_{\mu,1} \int_{\infty}^{x} u_\lambda \, dx}{z_{\lambda,\lambda}} + \lim_{x=\infty} \frac{z_{\mu-1,\lambda}}{z_{\lambda,\lambda}}$$

$$= \lim_{x=\infty} \frac{y_{\mu,1}}{y_{1,1}} \frac{y_{1,\lambda+1}}{z_{\lambda,\lambda}} + \lim_{x=\infty} \frac{z_{\mu-1,\lambda}}{z_{\lambda,\lambda}} = \begin{cases} 0 & \text{für } \mu - 1 \neq \lambda \\ 1 & \text{für } \mu - 1 = \lambda. \end{cases}$$

Aus dieser Gleichung und aus (25.) folgt aber sogleich:

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_{\mu,\lambda+1}}{y_{\lambda+1,\lambda+1}} = 0 \text{ (für } \mu = 1, 2, \ldots n; \text{ aber } \mu \neq \lambda + 1).$$

Aus der Gleichung (11.) ergibt sich dann ohne weiteres auch:

$$\lim_{x=\infty} \left(\frac{y'_{\lambda+1,\lambda+1}}{y_{\lambda+1,\lambda+1}} - f_{\lambda+1} \right) = 0.$$

Damit ist Satz 2 bewiesen. Denn daß die gefundenen Integralsysteme $y_{\mu,\lambda}$ linear unabhängig sind, folgt einfach daraus, daß die $z_{\mu,\lambda}$ linear unabhängig waren, so daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} & \cdots & y_{1,n} \\ y_{2,1} & y_{2,2} & \cdots & y_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n,1} & y_{n,2} & \cdots & y_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ y_{2,1} & z_{1,1} & \cdots & z_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n,1} & z_{n-1.1} & \cdots & z_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist.

Aus Satz 2 ergibt sich als Spezialfall insbesondere

Satz 3. *Das System von linearen Differentialgleichungen*

$$y'_\lambda = \varrho_\lambda y_\lambda + \sum_{\mu=1}^{n} \varphi_{\lambda,\mu}(x) y_\mu, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

wobei die Konstanten ϱ_λ *den Bedingungen*

$$\Re(\varrho_1) > \Re(\varrho_2) > \cdots > \Re(\varrho_n)$$

genügen, während die Funktionen $\varphi_{\lambda,\mu}(x)$ *für* $x \geqq x_0$ *stetig sind und für* $\lim x = \infty$ *den Grenzwert Null haben, besitzt n linear unabhängige Integralsysteme*

$$y_1 = y_{1,\lambda}, \; y_2 = y_{2,\lambda}, \cdots y_n = y_{n,\lambda}, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

für welche die Beziehungen gelten:

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_{\mu,\lambda}}{y_{\lambda,\lambda}} = 0, \qquad (\text{für } \mu \neq \lambda)$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{y'_{\lambda,\lambda}}{y_{\lambda,\lambda}} = \varrho_\lambda.$$

§ 4.

Wir wenden uns jetzt zu dem System von Differentialgleichungen

$$(26.) \qquad y'_\lambda = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\lambda,\mu}(x)\, y_\mu, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

wobei die $f_{\lambda,\mu}$ für $x \geqq x_0$ stetig seien, und wobei die Grenzwerte

$$(27.) \qquad \lim_{x=\infty} f_{\lambda,\mu}(x) = a_{\lambda,\mu}$$

existieren mögen. Hier ist es bequemer, eine symbolische Schreibweise mit Matrizen anzuwenden; setzt man

$$\begin{pmatrix} f_{1,1} & \cdots & f_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n,1} & \cdots & f_{n,n} \end{pmatrix} = F, \quad \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = A,$$

so lassen die Gleichungen (26.), (27.) sich abgekürzt folgendermaßen schreiben:

$$(26^a.) \qquad (y'_1, \ldots y'_n) = F(y_1, \ldots y_n),$$

$$(27^a.) \qquad \lim_{x=\infty} F = A.$$

Die Wurzeln der „charakteristischen Gleichung“

$$|E\varrho - A| = 0,$$

wo E die Einheitsmatrix bedeutet, seien $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$; sie seien alle voneinander verschieden. Dann existiert bekanntlich eine Matrix B mit von Null verschiedener Determinante und derart, daß

$$(28.) \qquad B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \varrho_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \varrho_2 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & \varrho_n \end{pmatrix}$$

ist. Setzt man daher

$$(29.) \qquad B^{-1}FB = \begin{pmatrix} \varrho_1 + \varphi_{1,1}(x) & \varphi_{1,2}(x) & \ldots & \varphi_{1,n}(x) \\ \varphi_{2,1}(x) & \varrho_2 + \varphi_{2,2}(x) & \ldots & \varphi_{2,n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n,1}(x) & \varphi_{n,2}(x) & \ldots & \varrho_n + \varphi_{n,n}(x) \end{pmatrix},$$

so ist wegen (27^a.) und (28.)

(30.) $$\lim_{x=\infty} \varphi_{\lambda,\mu}(x) = 0.$$

Die Differentialgleichungen (26ª.) transformieren wir jetzt vermittels der Substitution

(31.) $$(y_1, \dots y_n) = B(z_1, \dots z_n),$$

aus der durch Differentiation folgt:

$$(y_1', \dots y_n') = B(z_1', \dots z_n').$$

Dadurch geht (26ª.) über in:

(32.) $$(z_1', \dots z_n') = B^{-1} F B(z_1, \dots z_n),$$

wofür man nach (29.) in unsymbolischer Form schreiben kann:

(33.) $$z_\lambda' = \varrho_\lambda z_\lambda + \sum_{\mu=1}^{n} \varphi_{\lambda,\mu}(x)\, z_\mu. \qquad (\lambda = 1, 2, \dots n)$$

Wir setzen jetzt die reellen Teile der ϱ_λ voneinander verschieden voraus und denken sie uns so geordnet, daß

(34.) $$\Re(\varrho_1) > \Re(\varrho_2) > \cdots > \Re(\varrho_n)$$

ist. Nach Satz 3 gibt es dann n linear unabhängige Integralsysteme von (33.)

$$z_1 = z_{1,\lambda}, \quad z_2 = z_{2,\lambda}, \dots z_n = z_{n,\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \dots n)$$

derart, daß

(35.) $$\lim_{x=\infty} \frac{z_{\mu,\lambda}}{z_{\lambda,\lambda}} = 0 \qquad (\text{für } \mu \neq \lambda)$$

ist. Setzt man daher

(36.) $$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} \cdots b_{1,n} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ b_{n,1} \cdots b_{n,n} \end{pmatrix},$$

so liefert die Formel

(37.) $$(y_{1,\lambda}, \dots y_{n,\lambda}) = B\,(z_{1,\lambda}, \dots z_{n,\lambda})$$

oder, unsymbolisch geschrieben,

(38.) $$y_{\mu,\lambda} = \sum_{\nu=1}^{n} b_{\mu,\nu}\, z_{\nu,\lambda} \qquad (\mu = 1, 2, \dots n)$$

für $\lambda = 1, 2, \dots n$ je ein Integralsystem für die Gleichungen (26.), und diese Integralsysteme sind linear unabhängig. Dabei ist nach (38.) und (35.)

(39.) $$\lim_{x=\infty} \frac{y_{\mu,\lambda}}{z_{\lambda,\lambda}} = b_{\mu,\lambda}.$$

Daher auch

(40.) $$\lim_{x=\infty} \frac{y_{\mu,\lambda}'}{z_{\lambda,\lambda}} = \lim_{x=\infty} \frac{\sum_{\nu=1}^{n} f_{\mu,\nu}\, y_{\nu,\lambda}}{z_{\lambda,\lambda}} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu,\nu}\, b_{\nu,\lambda}.$$

Nach (28.) ist aber

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} \cdots a_{1,n} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ a_{n,1} \cdots a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} \cdots b_{1,n} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ b_{n,1} \cdots b_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1,1} \cdots b_{1,n} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ b_{n,1} \cdots b_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varrho_1 \cdots 0 \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 0 \cdots \varrho_n \end{pmatrix}$$

oder, was dasselbe sagt:

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu,\nu} b_{\nu,\lambda} = b_{\mu,\lambda} \varrho_\lambda ,$$

so daß (40.) übergeht in:

$$\lim_{x=\infty} \frac{y'_{\mu,\lambda}}{z_{\lambda,\lambda}} = b_{\mu,\lambda} \varrho_\lambda . \tag{41.}$$

Da die Determinante $|B| \neq 0$ war, so ist von den Zahlen $b_{1,\lambda}, b_{2,\lambda}, \ldots b_{n,\lambda}$ wenigstens eine $\neq 0$. Ist etwa $b_{\mu,\lambda} \neq 0$, so folgt aus (39.) und (41.):

$$\lim_{x=\infty} \frac{y'_{\mu,\lambda}}{y_{\mu,\lambda}} = \varrho_\lambda . \tag{42.}$$

Dieses Ergebnis formulieren wir in

Satz 4. *Bei dem System von Differentialgleichungen*

$$y'_\lambda = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\lambda,\mu}(x)\, y_\mu \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

mögen die Koeffizienten $f_{\lambda,\mu}$ *für* $x \geqq x_0$ *stetig sein und für* $\lim x = \infty$ *gegen gewisse Grenzwerte*

$$\lim_{x=\infty} f_{\lambda,\mu}(x) = a_{\lambda,\mu}$$

konvergieren. Setzt man dann $(a_{\lambda,\mu}) = A$ *und haben die Wurzeln* $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ *der Gleichung* $|E\varrho - A| = 0$ *ungleiche reelle Teile:*

$$\Re(\varrho_1) > \Re(\varrho_2) > \cdots > \Re(\varrho_n) ,$$

so besitzen die Differentialgleichungen n linear unabhängige Integralsysteme

$$y_1 = y_{1,\lambda} , \; y_2 = y_{2,\lambda} , \ldots y_n = y_{n,\lambda} , \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

die so beschaffen sind, daß die Beziehung

$$\lim_{x=\infty} \frac{y'_{\mu,\lambda}}{y_{\mu,\lambda}} = \varrho_\lambda$$

statthat, unter μ, λ *irgendein Wertepaar verstanden, für welches das Element* $b_{\mu,\lambda}$ *einer der Gleichung*

$$B^{-1} A B = \begin{pmatrix} \varrho_1 \cdots 0 \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 0 \cdots \varrho_n \end{pmatrix}$$

genügenden Matrix $B = (b_{\lambda,\;})$ *nicht verschwindet. Zu jedem* λ *gibt es wenigstens ein derartiges* μ.

§ 5.

Wir kommen jetzt zu der linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$z^{(n)} + f_1(x)\,z^{(n-1)} + \cdots + f_n(x)\,z = 0, \tag{43.}$$

deren Koeffizienten $f_\lambda(x)$ für $x \geqq x_0$ stetig sein und für $\lim x = \infty$ gewissen Grenzwerten

$$\lim_{x=\infty} f_\lambda(x) = a_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n) \tag{44.}$$

zustreben mögen. Setzt man

$$z = y_1,\ z' = y_2, \ldots z^{(n-1)} = y_n, \tag{45.}$$

so geht die Differentialgleichung (43.) über in das System:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \cdots\cdots \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = -f_n y_1 - f_{n-1} y_2 - \cdots - f_1 y_n. \end{cases} \tag{46.}$$

Um hierauf Satz 4 anwenden zu können, ist zunächst

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}$$

zu setzen; also

$$|E\varrho - A| = \begin{vmatrix} \varrho & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varrho & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & \varrho + a_1 \end{vmatrix},$$

oder einfacher:

$$|E\varrho - A| = \varrho^n + a_1\varrho^{n-1} + a_2\varrho^{n-2} + \cdots + a_n. \tag{47.}$$

Sodann müssen wir eine Matrix B von der in Satz 4 verlangten Art ausfindig machen. Sind wieder $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ die Wurzeln der Gleichung $|E\varrho - A| = 0$, so besteht die Identität

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \varrho_1 & \varrho_2 & \cdots & \varrho_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varrho_1^{n-1} & \varrho_2^{n-1} & \cdots & \varrho_n^{n-1} \end{pmatrix} \\ \quad = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \varrho_1 & \varrho_2 & \cdots & \varrho_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varrho_1^{n-1} & \varrho_2^{n-1} & \cdots & \varrho_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varrho_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varrho_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varrho_n \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{48.}$$

Denn die rechte Seite dieser Gleichung wird, wenn man das Matrizenprodukt ausrechnet, gleich

$$\begin{pmatrix} \varrho_1 & \varrho_2 & \cdots & \varrho_n \\ \varrho_1^2 & \varrho_2^2 & \cdots & \varrho_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \varrho_1^n & \varrho_2^n & \cdots & \varrho_n^n \end{pmatrix}.$$

Auf der linken Seite kommt dasselbe, abgesehen von der letzten Zeile, deren λ-tes Element hier

$$-a_n - a_{n-1}\varrho_\lambda - a_{n-2}\varrho_\lambda^2 - \cdots - a_1\varrho_\lambda^{n-1}$$

wird; aber das ist in der Tat gleich ϱ_λ^n, da ja ϱ_λ eine Wurzel des Polynoms (47.) ist.

Setzt man nun

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \varrho_1 & \varrho_2 & \cdots & \varrho_n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \varrho_1^{n-1} & \varrho_2^{n-1} & \cdots & \varrho_n^{n-1} \end{pmatrix}, \tag{49.}$$

so besagt Gleichung (48.) soviel wie

$$AB = B\begin{pmatrix} \varrho_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \varrho_n \end{pmatrix}.$$

Sind also alle ϱ_λ voneinander verschieden, so ist $|B| \neq 0$, und die Matrix B hat gerade die in Satz 4 verlangte Eigenschaft. Wenn daher wieder

$$\Re(\varrho_1) > \Re(\varrho_2) > \cdots > \Re(\varrho_n) \tag{50.}$$

angenommen wird, so gibt es nach Satz 4 für $\lambda = 1, 2, \ldots n$ je ein Integralsystem

$$y_1 = y_{1,\lambda},\ y_2 = y_{2,\lambda}, \cdots y_n = y_{n,\lambda},$$

für welches die Beziehung

$$\lim_{x=\infty} \frac{y'_{\mu,\lambda}}{y_{\mu,\lambda}} = \varrho_\lambda$$

statthat, sobald $\varrho_\lambda^{\mu-1} \neq 0$ ist, also gewiß für $\mu = 1$. Diesem entspricht aber vermöge (45.) ein Integral z_λ der Gleichung (43.), für welches

$$\lim_{x=\infty} \frac{z_\lambda^{(\mu)}}{z_\lambda^{(\mu-1)}} = \varrho_\lambda \qquad (\mu = 1, 2, \ldots n;\ \varrho_\lambda^{\mu-1} \neq 0)$$

ist, also auch, wenn $\varrho_\lambda \neq 0$,

$$\lim_{x=\infty} (z_\lambda : z'_\lambda : z''_\lambda : \cdots : z_\lambda^{(n)}) = 1 : \varrho_\lambda : \varrho_\lambda^2 : \cdots : \varrho_\lambda^n.$$

Die Integrale $z_1, z_2, \ldots z_n$ sind wieder linear unabhängig, und man erhält

Satz 5. *Die Koeffizienten der linearen Differentialgleichung*

$$z^{(n)} + f_1(x) z^{(n-1)} + \cdots + f_n(x) z = 0$$

mögen für $x \geqq x_0$ *stetig sein, und es sei*

$$\lim_{x=\infty} f_\lambda(x) = a_\lambda. \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

Ferner mögen die Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ *der Gleichung*

$$\varrho^n + a_1 \varrho^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

voneinander verschiedene reelle Teile haben. Dann gibt es ein Fundamentalsystem von Integralen $z_1, z_2, \ldots z_n$, *für welche die Beziehungen*

$$\lim_{x=\infty} \frac{z_\lambda'}{z_\lambda} = \varrho_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

statthaben, und allgemeiner für $\varrho_\lambda \neq 0$:

$$\lim_{x=\infty} (z_\lambda : z_\lambda' : z_\lambda'' : \cdots : z_\lambda^{(n)}) = 1 : \varrho_\lambda : \varrho_\lambda^2 : \cdots : \varrho_\lambda^n.$$

Aus der Beziehung $\lim_{x=\infty} \frac{z_\lambda'}{z_\lambda} = \varrho_\lambda$ folgt

$$\frac{z_\lambda'}{z_\lambda} = \varrho_\lambda + \varepsilon_\lambda(x), \quad \lim_{x=\infty} \varepsilon_\lambda(x) = 0.$$

Also durch Integration

$$z_\lambda = C_\lambda e^{\int^x (\varrho_\lambda + \varepsilon_\lambda(x))\,dx} \qquad (C_\lambda \neq 0)$$

Daher ist gewiß mit Rücksicht auf (50.)

$$\lim_{x=\infty} \frac{z_\mu}{z_\lambda} = 0 \qquad (\text{für } \mu > \lambda),$$

und auch

$$\lim_{x=\infty} \frac{z_\mu'}{z_\lambda} = \lim_{x=\infty} \frac{z_\mu'}{z_\mu} \frac{z_\mu}{z_\lambda} = \varrho_\mu \cdot 0 = 0 \qquad (\text{für } \mu > \lambda).$$

Betrachtet man daher das Partikulärintegral

$$z = c_\lambda z_\lambda + c_{\lambda+1} z_{\lambda+1} + \cdots + c_n z_n \qquad (c_\lambda \neq 0),$$

so ist

$$\lim_{x=\infty} \frac{z'}{z} = \lim_{x=\infty} \frac{c_\lambda \frac{z_\lambda'}{z_\lambda} + c_{\lambda+1} \frac{z_{\lambda+1}'}{z_\lambda} + \cdots + c_n \frac{z_n'}{z_\lambda}}{c_\lambda \frac{z_\lambda}{z_\lambda} + c_{\lambda+1} \frac{z_{\lambda+1}}{z_\lambda} + \cdots + c_n \frac{z_n}{z_\lambda}} = \frac{c_\lambda \varrho_\lambda}{c_\lambda} = \varrho_\lambda.$$

Der Grenzwert $\lim_{x=\infty} \frac{z'}{z}$ existiert also für jedes (nicht identisch verschwindende) Integral z und ist gleich einer Wurzel der Gleichung

$$\varrho^n + a_1 \varrho^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$

Für das *allgemeine* Integral ist dieser Grenzwert gleich derjenigen Wurzel,

die den algebraisch größten reellen Teil hat. Nur für gewisse Partikulärintegrale erhält man eine der andern Wurzeln; speziell die Wurzel mit dem algebraisch kleinsten reellen Teil entsteht nur für ein einziges Partikulärintegral (von einem konstanten Faktor abgesehen).

In den Ergebnissen dieses Paragraphen sind insbesondere die in der Einleitung erwähnten Sätze von *Poincaré* enthalten.

§ 6.

Man kann fragen, wie sich die Integrale der Differentialgleichung (43.) im Unendlichen verhalten, wenn die Wurzeln ϱ_λ nicht lauter verschiedene reelle Teile haben. Falls etwa nur

$$\Re(\varrho_1) > \Re(\varrho_\lambda) \qquad (\lambda = 2, 3, \dots n)$$

ist, so läßt sich, wenn unter den ϱ_λ keine gleichen sind, mit unserer Methode immer noch zeigen, daß für das allgemeine Integral

$$\lim_{x=\infty} \frac{z'}{z} = \varrho_1$$

wird. Und wenn ein Index k existiert derart, daß die Ungleichungen

$$\Re(\varrho_1) > \Re(\varrho_2) > \cdots > \Re(\varrho_k),$$
$$\Re(\varrho_k) > \Re(\varrho_\lambda) \quad (\text{für } \lambda = k+1, k+2, \dots n)$$

gelten, so gibt es auch Integrale $z_1, z_2, \dots z_k$, für welche die Beziehungen

$$\lim_{x=\infty} \frac{z_\mu'}{z_\mu} = \varrho_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \dots k)$$

statthaben. Doch wollen wir hier den ausführlichen Beweis unterlassen. Wenn dagegen der größte reelle Teil bei mehreren Wurzeln ϱ_λ auftritt, so läßt sich nichts derartiges aussagen. In der Tat kann es dann auch vorkommen, daß der Quotient $\frac{z'}{z}$ für gewisse beliebig große x unstetig wird und überhaupt keinen Grenzwert hat.

Ein Beispiel dafür ist schon die einfache Gleichung mit konstanten Koeffizienten

$$z'' + z = 0.$$

Hier ist $\varrho_1 = \sqrt{-1}$, $\varrho_2 = -\sqrt{-1}$; also $\Re(\varrho_1) = \Re(\varrho_2) = 0$. Das allgemeine Integral lautet

$$z = C \sin(x - \alpha),$$

wo C, α Konstanten sind; also wird in der Tat $\frac{z'}{z}$ unstetig für $x = \alpha + n\pi$, wo n jede ganze Zahl bedeutet.

Wenn aber die Wurzeln mit dem größten reellen Teil alle einander gleich sind, so ist bei der Gleichung mit konstanten Koeffizienten für das allgemeine Integral wieder $\lim\limits_{x=\infty} \frac{z'}{z} = \varrho_1$, wie man sofort aus der bekannten Form des allgemeinen Integrals abliest. Die von *Poincaré* a. a. O. aufgestellte Behauptung, daß es bei variablen Koeffizienten ebenso sei, ist indessen unrichtig, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$z'' - 2z' + \left(1 + \frac{a}{x}\right) z = 0 \qquad (a > 0). \tag{51.}$$

Hier ist nämlich $\varrho_1 = \varrho_2 = 1$. Nach *Poincaré* müßte also

$$\lim_{x=\infty} \frac{z'}{z} = 1 \tag{52.}$$

sein. Man sieht aber leicht, daß das wenigstens für ein reelles Integral z niemals richtig ist. In der Tat, setzt man $\frac{z'}{z} = u$, so geht Gleichung (51.) über in die *Riccati*sche Gleichung

$$u' = -(u-1)^2 - \frac{a}{x}.$$

Daher ist

$$u' \leqq -\frac{a}{x},$$

und durch Integration folgt hieraus, wenn u im Intervall (x_1, x_2) stetig bleibt,

$$u(x_2) - u(x_1) \leqq -a \log \frac{x_2}{x_1},$$

so daß gewiß nicht $\lim\limits_{x_2=\infty} u(x_2) = 1$ sein kann. Damit ist die *Poincaré*sche Behauptung (52.) bereits widerlegt. Eine genauere Untersuchung würde sogar zeigen, daß $u = \frac{z'}{z}$ für gewisse beliebig große x unstetig wird; doch wollen wir darauf nicht weiter eingehen.

Zur Theorie der Kegelschnitte.

Von Herrn *J. Rosanes* in Breslau.

In seinem inhaltreichen Buche „Géométrie de direction“ macht *P. Serret* die Bemerkung, daß während das *Pascal*sche Theorem in sehr einfacher Weise über die besondere Lage von sechs Punkten eines Kegelschnitts Aufschluß gibt, etwas Ähnliches über gemischte (Punkte und Tangenten usf.) sechs Elemente nicht bekannt sei. Diese Lücke ist meines Wissens auch jetzt noch nicht ausgefüllt.

Wenn auch fünf gemischte Elemente einen Kegelschnitt nicht mehr eindeutig bestimmen, wie es bei fünf reinen der Fall ist, somit ein sechstes auf linealem Wege nicht herstellbar ist, so ist es doch aus allgemeinen Gründen sicher, daß auch bei sechs gemischten Elementen sich mittels des Lineals muß entscheiden lassen, ob sie zu einem und demselben Kegelschnitt gehören, oder nicht. Einen derartigen, wie mir scheint, einfachen Satz für das System von vier Punkten und zwei Tangenten, der mir seit einer Reihe von Jahren bekannt ist, hier mitzuteilen, ist der Zweck der nachstehenden Zeilen.

Es seien $\beta\gamma\delta\varepsilon\ aa'$ vier Punkte und zwei Geraden der Ebene, deren Koordinaten in einem Trilinearsystem $\beta_1\beta_2\beta_3$ usw. heißen mögen.

Die Gegenseitenpaare des vollständigen eigentlichen Vierecks $\beta\gamma\delta\varepsilon$ sind

$$\beta\varepsilon = b,\ \gamma\delta = b',\ \gamma\varepsilon = c,\ \beta\delta = c',\ \delta\varepsilon = d,\ \beta\gamma = d',$$

so daß das Diagonaldreieck die Ecken besitzt

$$(b, b') = \eta^2,\ (c, c') = \eta^3,\ (d, d') = \eta^4.$$

Wir bezeichnen noch den Punkt (aa') mit η^1 (statt η^i wird, wo Mißverständnis ausgeschlossen ist, auch kurz i geschrieben) und setzen*)

*) Wegen Bezeichnung und Terminologie vgl.: „Ein Satz über konjugierte Formen“, dieses Journals, Bd. 142, S. 57.

$$a_\xi a'_\xi \equiv f^1(\xi\xi),\ b_\xi b'_\xi \equiv f^2(\xi\xi),\ c_\xi c'_\xi \equiv f^3(\xi\xi),\ d_\xi d'_\xi \equiv f^4(\xi\xi).$$

Es soll ferner, wenn $\Theta^1, \Theta^2, \ldots$ quadratische Formen bedeuten, das Zeichen $(\Theta^1, \Theta^2, \ldots)$ ihre Gruppe bedeuten und die Ungleichung

$$(H^1, H^2, \ldots) < (\Theta^1, \Theta^2, \ldots)$$

besagen, daß die linksstehende Gruppe ganz in der rechten gelegen ist. Wenn nun ein Kegelschnitt $f(\xi\xi) = 0$ existiert, der durch $\beta\gamma\delta\varepsilon$ hindurchgeht und zugleich aa' zu Tangenten hat, dann besteht, da **234** ein Polardreiseit von $f(\xi\xi)$ bildet, die Beziehung

$$f(\xi\xi) < (34^2, 42^2, 23^2),$$

worin ik der Abkürzung wegen an Stelle der Determinante $(\xi\eta^i\eta^k)$ gesetzt ist. Nennt man l die Polare des Punktes $(a, a') \equiv 1$ in bezug auf $f(\xi\xi)$, so ist bekanntlich andrerseits

$$a_\xi a'_\xi < (f(\xi\xi), ll),$$

folglich

$$aa' < (34^2, 42^2, 23^2, ll),$$

d. h. die Berührungssehne l ergänzt das Diagonaldreiseit **234** zu einem Polarvierseit von aa'.

Wir wollen vorderhand voraussetzen, daß die Lage der sechs Elemente $\beta\gamma\delta\varepsilon\ aa'$ eine „allgemeine" sei, worunter verstanden werden soll, daß von den Diagonalecken **234** keine zwei bezüglich $aa' \equiv f'(\xi\xi)$ konjugiert, oder mit dem Punkte **1** allineiert sind. (Es wird sich später zeigen, daß diese zwei Ausnahmen auf ein und dasselbe hinauslaufen.)

In diesem „allgemeinen" Falle gibt es *eine* Gerade l, die **234** zu einem Polarvierseit von aa' ergänzt (und die mit keinem der Punkte **1234** inzidiert). Als Polare von **1** in bezug auf $f(\xi\xi)$ muß aber l den Punkt $1'$ enthalten, der zu **1** bezüglich des Büschels $\beta\gamma\delta\varepsilon$ konjugiert ist, folglich gilt der

Satz: *Sind $\beta\gamma\delta\varepsilon\ aa'$ vier Punkte und zwei Tangenten eines und desselben Kegelschnittes $f(\xi\xi)$ (in „allgemeiner" Lage), dann ist die das Diagonaldreieck von $\beta\gamma\delta\varepsilon$ zu einem Polarvierseit von aa' ergänzende Gerade l inzident mit dem Punkte $1'$, der mit $1 = (a, a')$ konjugiert ist für den Büschel $\beta\gamma\delta\varepsilon$. — Zugleich ist l die Polare von **1** bezüglich $f(\xi\xi)$.* —

*Sind umgekehrt $\beta\gamma\delta\varepsilon\ aa'$ vier Punkte und zwei Geraden der Ebene in „allgemeiner" Lage und ist die Gerade l, welche das Diagonaldreieck **234** von $\beta\gamma\delta\varepsilon$ zu einem Polarvierseit von aa' ergänzt, inzident mit dem Punkte $1'$,*

der zu 1 *konjugiert ist für den Büschel* $\beta\gamma\delta\varepsilon$, *dann existiert ein Kegelschnitt* $f(\xi\xi)$, *der durch* $\beta\gamma\delta\varepsilon$ *hindurchgeht und* aa' *zu Tangenten hat. — Zugleich ist* l *die Polare des Punktes* (a, a') *bezüglich* $f(\xi\xi)$. —

Beweis. Da l (die wegen der vorausgesetzten allgemeinen Lage durch keinen der Punkte 1234 gehen kann) durch $1'$ geht, so existiert im Büschel $\beta\gamma\delta\varepsilon$ sicher ein Kegelschnitt $f(\xi\xi)$, für den 1 und l Pol und Polare sind. Nennt man p, q die von $(a, a') = 1$ an $f(\xi\xi)$ gehenden Tangenten, so besteht die Beziehung

$$pq < (f, ll).$$

Da

$$f(\xi\xi) < (34^2, 42^2, 23^2),$$

so folgt

$$pq < (34^2, 42^2, 23^2, ll).$$

Der Voraussetzung nach ist aber auch

$$aa' < (34^2, 42^2, 23^2, ll),$$

die beiden Geradenpaare aa', pq mit dem gleichen Doppelpunkt haben somit ein eigentliches Polarvierseit gemein*). Daraus folgt, daß $pq \equiv aa'$, w. z. b. w.

Da sowohl der Punkt $1'$ als auch die Gerade l sehr leicht auf linealem Wege konstruiert werden können, so ist bei gegebenen sechs gemischten Elementen (4 Punkte, 2 Geraden) mittels obigen Satzes die Entscheidung leicht gefällt, ob sie zu einem und demselben Kegelschnitte gehören oder nicht.

Die Konstruktion wird vielleicht noch durchsichtiger durch folgende Bemerkung.

Gehören $\beta\gamma\delta\varepsilon\ aa'$ zu demselben Kegelschnitte, so besteht eine Identität von der Form

$$(1.) \qquad h_1 f^1(\xi\xi) + h_i f^i(\xi\xi) + h_k f^k(\xi\xi) + h l_\xi^2 \equiv 0,$$

worin i, k irgend zwei Indizes der Reihe 234 bedeuten.

Polarisiert man (1.) mittels η und ersetzt η nach und nach durch η^1, η^i, η^k, so erhält man:

---

*) Man kann auch folgendermaßen argumentieren: aa', pq lassen sich als binäre Formen zu einem vollen Quadrat oder zu Null komponieren. Das erstere kann aber hier nicht eintreten, weil fünf Doppelgeraden nicht in Abhängigkeit stehen, wenn nicht wenigstens vier von ihnen in einem Punkte konvergieren. — Andere Möglichkeiten sind durch die allgemeine Lage ausgeschlossen.

$$(2.)\quad \begin{cases} \cdot & h_i f^i(\xi\eta^1) + h_k f^k(\xi\eta^1) + h \cdot l_\xi \cdot l_{\eta^1} \equiv 0, \\ h_1 f^1(\xi\eta^i) & \cdot \quad + h_k f^k(\xi\eta^i) + h \cdot l^\xi \cdot l_{\eta^i} \equiv 0, \\ h_1 f^1(\xi\eta^k) + h_i f^i(\xi\eta^k) & \cdot \quad + h \cdot l_\xi \cdot l_{\eta^k} \equiv 0, \end{cases}$$

da $f^1(\xi\eta^1) \equiv f^i(\xi\eta^i) \equiv f^k(\xi\eta^k) \equiv 0$ ist.

Die linken Seiten in (2.) sind wegen der „allgemeinen" Lage komplet, auch können nicht zwei Terme zusammenfallen.

Nennt man p_ϱ^σ die Polare des Punktes η^ϱ bezüglich $f^\sigma(\xi\xi)$, so besagen die Gleichungen (2.) offenbar:

*Gehören $\beta\gamma\,\delta\,\varepsilon\;\; a\,a'$ zu einem und demselben Kegelschnitte, so liegen die drei Punkte $(p_1^i, p_1^k) \equiv \pi_1^{ik}$, $(p_i^k, p_i^1) \equiv \pi_i^{k1}$, $(p_k^1, p_k^i) \equiv \pi_k^{1i}$ in einer Geraden (der Berührungssehne)**).

---

*) Es ist vielleicht nicht ohne Interesse zu zeigen, wie die Umkehrung dieses Satzes durch direkte Rechnung bewiesen werden kann. Liegen die drei Punkte (p_1^2, p_1^3), (p_2^3, p_2^1), (p_3^1, p_3^2) (die Indizes ik sind der Einfachheit wegen durch 2,3 ersetzt) in einer Geraden, so müssen Identitäten der Form bestehen:

$$q_2^1 f^2(\xi 1) + q_3^1 f^3(\xi 1) \equiv q \cdot l_\xi,\;\; q_1^2 f^1(\xi 2) + q_3^2 f^3(\xi 2) \equiv q' \cdot l_\xi$$
$$q_1^3 f^1(\xi 3) + q_2^3 f^2(\xi 3) \equiv q'' \cdot l_\xi,$$

worin die Größen $q, \ldots$ unbekannte Konstanten bedeuten. Wegen der „allgemeinen" Lage sind diese Gleichungen komplet, auch kann man leicht sehen, daß deswegen auch $l_{\eta^1} \cdot l_{\eta^2} \cdot l_{\eta^3} \neq 0$ sein muß. Infolgedessen darf man diese Identitäten bzw. mit $\eta^1, l_{\eta^2}, l_{\eta^3}$ multiplizieren, so daß bei Umänderung der Bezeichnung der Konstanten $q, \ldots$ die Gleichungen lauten werden:

$$(3.)\quad \begin{cases} q_1^1 f^1(\xi 1) + q_2^1 f^2(\xi 1) + q_3^1 f^3(\xi 1) \equiv l_\xi \cdot l_{\eta^1}, \\ q_1^2 f^1(\xi 2) + q_2^2 f^2(\xi 2) + q_3^2 f^3(\xi 2) \equiv l_\xi \cdot l_{\eta^2}, \\ q_1^3 f^1(\xi 3) + q_2^3 f^2(\xi 3) + q_3^3 f^3(\xi 3) \equiv l_\xi \cdot l_{\eta^3}. \end{cases}$$

Dabei durften der Symmetrie wegen links die Diagonalterme mit ganz beliebigen Koeffizienten q_i^i hinzugefügt werden, da $f^i(\xi i) \equiv 0$ ist. Komponiert man die Gleichungen (3.) mit $(\Xi 23), (\Xi 31), (\Xi 12)$, so folgt wegen der Identität: $l_{\eta^1}(\Xi 23) + l_{\eta^2}(\Xi 31) + l_{\eta^3}(\Xi 12) \equiv (123) \cdot l_\Xi$ die folgende:

$$(4.)\quad (123)\, l_\xi \cdot l_\Xi \equiv (\Xi 23) \sum q_i^1 f^i(\xi 1) + (\Xi 31) \sum q_i^2 f^i(\xi 2) + (\Xi 12) \sum q_i^3 f^i(\xi 3).$$

Da die Linke in ξ, Ξ symmetrisch ist, so muß auch die Rechte es sein, d. h. es ist

$$0 \equiv \sum_i q_i^1 \{(\Xi 23) f^i(\xi 1) - (\xi 23) f^i(\Xi 1)\} + \sum_i q_i^2 \{(\Xi 31) f^i(\xi 2) - (\xi 31) f^i(\Xi 2)\} + \sum_i q_i^3 \{(\Xi 12) f^i(\xi 3) - (\xi 12) \cdot f^i(\Xi 3)\},$$

d. h.

$$0 \equiv \sum_i q_i^1 \{(\Xi\xi 3) f^i(12) - (\Xi\xi 2) f^i(31)\} + \sum_i q_i^2 \{(\Xi\xi 1) f^i(23) - (\Xi\xi 3) f^i(12)\} + \sum_i q_i^3 \{(\Xi\xi 2) f^i(31) - (\Xi\xi 1 f^i(23)\},$$

oder wenn man berücksichtigt, daß $f^i(\lambda\mu)$ immer Null ist, wenn $\lambda = i$ oder $\mu = i$:

$$(\Xi\xi 1) f^1(23) \cdot (q_1^2 - q_1^3) + (\Xi\xi 2)(q_2^3 - q_2^1) f^2(31) + (\Xi\xi 3) f^3(12)(q_3^1 - q_3^2) \equiv 0,$$

Offenbar ist π_1^{ik} identisch mit $1'$, die Gerade (π_i^{k1}, π_k^{1i}) mit l.

Diese Gestalt des Satzes gestattet noch eine Umformung.

Zu zwei Geradenpaaren z. B. f^ϱ, f^σ gehört, wenn ihre Schnittpunkte distinkt sind, *ein* drittes, das ihrem Büschel angehört.

Nennt man $(\varrho\sigma)$ den Doppelpunkt dieses dritten Paares, dann führt unser Satz auf folgenden:

Gehören $\beta\gamma\delta\varepsilon$ aa' bei allgemeiner Lage zu demselben Kegelschnitte, so *bilden die sechs Punkte* $1(13)\ 3(32)\ 2(21)$ *ein Pascalsches Sechseck* ((23) ist mit 4 identisch).

Für das gemischte System von vier Tangenten und zwei Punkten desselben Kegelschnitts lautet der Satz:

Sind $bcde$ $\alpha\alpha'$ vier Tangenten und zwei Punkte desselben Kegelschnitts $\varphi(uu) = 0$ (in allgemeiner Lage)), dann liegt der Punkt λ, der das Diagonaldreieck von $bcde$ zu einem Polarviereck von $\alpha\alpha'$ ergänzt, inzident mit der Geraden, welche mit der Geraden $\alpha\alpha' = 1$ konjugiert ist bezüglich der Kegelschnittschaar $(bcde)$, und umgekehrt. — Zugleich ist λ der Pol der Geraden $\alpha\alpha'$ bezüglich $\varphi(uu)$.* —

Besondere Lagen. — Es seien jetzt $\beta\gamma\delta\varepsilon aa'$, zu demselben Kegelschnitt $f(\xi\xi)$ gehörend, nicht in „allgemeiner" Lage, sondern so, daß zwei Diagonalpunkte etwa $23 \frown f^1(\xi\xi)$ sind (das Zeichen $\frown$ bedeute das Konjugiertsein). Es ist alsdann $p_2^1 = 31$, $p_3^1 = 21$ und die Geraden $12, 13$ sind konjugiert zu aa', folglich auch zu $f(\xi\xi)$, d. h. π_{13}^f (Pol von 13 bezüglich f) inzidiert mit 12. Da nun $\pi_{13}^f = (l, 24)$, so konvergieren $l, 12, 24$, oder 2 inzidiert mit l, folglich $p_2^1 = p_2^f = 34$, d. h. $34 \frown aa'$. Wenn also zwei Ecken

---

folglich, da $(\Xi\xi 1), (\Xi\xi 2), (\Xi\xi 3)$ linear unabhängig sind und wegen der allgemeinen Lage $f^1(23) \cdot f^2(31) \cdot f^3(12) \neq 0$ ist,

$$q_1^2 = q_1^3,\ q_2^3 = q_2^1,\ q_3^1 = q_3^2.$$

Setzt man diese Größen bzw. gleich p_1, p_2, p_3 und wählt die noch freien Größen $q_1^1 = p_1, q_2^2 = p_2, q_3^3 = p_3$, so nimmt die Identität (4.) die Gestalt an

$$(123) l_\xi \cdot l_\Xi \equiv \Sigma p_i \{(\Xi 23) f^i(\xi 1) + (\Xi 31) f^i(\xi 2) + (\Xi 12) f^i(\xi 3)\}$$
$$\equiv (123) \sum_{ik} p_i \xi_k f_k^i(\Xi_k) \equiv (123) \Sigma p_i f^i(\xi\Xi)$$

und für $\Xi = \xi$,

$$l_\xi^2 \equiv \Sigma p_i f^i(\xi\xi), \qquad \text{w. z. b. w.}$$

*) was hier bedeutet, daß von den Diagonalen des Vierseits $bcde$ keine zwei konjugiert sind bezüglich aa' oder sich auf der Geraden $\alpha\alpha'$ schneiden.

des Diagonaldreiecks konjugiert sind bezüglich f^1, so sind es zwei andere, das dritte Eckenpaar ist mit 1 allineiert.

Ein Gleiches läßt sich folgern, wenn man von der Annahme ausgeht, daß zwei Diagonalpunkte mit dem Punkte 1 allineiert sind.

Sind umgekehrt $\beta\gamma\delta\varepsilon\, aa'$ so gelegen, daß etwa $(23, 34) \frown f^1$ (124 in einer Geraden), dann gibt es einen (und sogar noch einen zweiten) Kegelschnitt durch $\beta\gamma\delta\varepsilon$, der aa' berührt. Denn, es sei $f(\xi\xi) = a$ ein Kegelschnitt durch $\beta\gamma\delta\varepsilon$, der a zur Tangente hat. Da die Berührung nicht im Punkte 1 stattfindet, so geht durch 1 eine zweite Tangente a'' an f. Da aber der Voraussetzung nach $(13, 14) \frown aa'$, nach vorstehendem $aa'' \frown (13, 14)$, so ist $a'' \equiv a'$*).

Fällt ein Diagonalpunkt, etwa 2 mit 1 zusammen, so ist leicht zu sehen, daß 13, 14 harmonisch zu aa' liegen, wenn $\beta\gamma\delta\varepsilon\, aa'$ zu einem Kegelschnitt gehören, und umgekehrt.

Die entsprechenden besonderen Lagen bei der dualen Figur dürfen wohl übergangen werden.

Läßt man von den sechs gemischten Elementen $bcde\, \alpha\alpha'$ die beiden Punkte $\alpha\alpha'$ mit den imaginären Kreispunkten der Ebene zusammenfallen, so nimmt unser Satz die Gestalt an:

Ist $bcde$ ein Kreistangentenvierseit in „allgemeiner" Lage, dann ist der Höhenpunkt des Diagonaldreiecks inzident mit der Mittellinie von $bcde$ (Ort der Mittelpunkte aller Kegelschnitte der Schar $bcde$). Zugleich ist der Höhenpunkt der Mittelpunkt der Kreislinie, und umgekehrt.

Besondere Lage tritt hier ein, sobald zwei Diagonalen einen rechten Winkel bilden; alsdann müssen aber zwei Diagonalen auf der dritten senkrecht stehen. Ist eine Diagonale die ideelle Gerade, dann müssen die beiden anderen aufeinander senkrecht stehen (nach obigem).

Der erste Fall ist der des Deltoids, das nach obigem zwei Berührungskreise hat, der zweite der des Rhombus.

Der vorstehende Satz über das Kreistangentenvierseit gestattet folgenden weiteren auszusprechen:

---

*) Man sieht, daß auch für diese besondere Lage die Forderung der allgemeinen erfüllt ist. Denn offenbar ist jetzt 13 die Ergänzungsgerade l, der Punkt $1'$ fällt mit 3 zusammen, so daß nach der allgemeinen Forderung auch hier l mit $1'$ inzidiert.

***Weiß man von einem Polardreieck eines eigentlichen Kegelschnitts $\varphi(uu)$, daß sein Höhenpunkt λ mit dem Zentrum des Kegelschnitts identisch ist, so gilt das Gleiche von jedem Polardreieck von φ, und $\varphi(uu) = 0$ stellt eine Kreislinie dar**).** (Vorausgesetzt wird hierbei, daß allgemeine Lage bezüglich $\alpha\alpha'$ stattfindet, d. h. keine zwei Seiten einen rechten Winkel bilden.)

Die Identität (1.) zeigt das charakteristische Merkmal, daß die drei Geradenpaare f^1, f^i, f^k gleichmäßig in ihr auftreten, woraus folgt, daß, wenn im Büschel (f^i, f^k) ein Kegelschnitt vorkommt, der $f^1 = aa'$ zu Tangenten hat, ein Gleiches von dem Büschel (f^1, f^k) gegenüber f^i gilt usf.

Dasselbe kann man selbstverständlich von der dualen Figur aussagen. Wendet man dies auf das System $bcde\ \alpha\alpha'$ an, in dem $\alpha\alpha'$ die imaginären Kreispunkte bedeuten, so ergibt sich: Wenn $bcde$ ein Kreistangentenvierseit bilden, dann gibt es auch einen Kegelschnitt durch die Punkte $\beta = (b, e)$, $\beta' = (c, d)$, der die vier Geraden $\alpha\gamma, \alpha'\gamma, \alpha\gamma', \alpha'\gamma'$ (worin $\gamma = (c, e)$, $\gamma' = (b, d)$ bedeutet) berührt, und umgekehrt, was auf den bekannten Satz führt:

Die vier Leitstrahlen zweier Punkte eines Kegelschnitts sind stets Tangenten einer Kreislinie.

**) Sind 234 die Ecken des Polardreiecks, $\varrho\sigma$ die ideellen Punkte von $\varphi(uu)$. dann ist $\alpha\alpha' < (2^2, 3^2, 4^2, \lambda^2)$, weil λ Höhenpunkt (α, α' sind die imaginären Kreispunkte), $\varrho\sigma < (2^2, 3^2, 4^2, \lambda^2)$, weil λ Mittelpunkt ist. Daraus folgt (Vgl. S. 273 Fußnote) $\varrho\sigma \equiv \alpha\alpha'$, w. z. b. w.

Neuer Beweis eines *Minkowski*schen Satzes.

Von Herrn *R. Remak* in Berlin.

Minkowski hat durch geometrische Betrachtungen folgenden arithmetischen Satz bewiesen*):

Es sei

$$(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0) = (\alpha x + \beta y - \xi_0)(\gamma x + \delta y - \eta_0)$$

eine zerlegbare, nicht homogene quadratische Form, in der

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi_0, \eta_0$ *im übrigen beliebige reelle Zahlen. Dann lassen sich ganze rationale Zahlen* x, y *so bestimmen, daß*

$$|(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)| \leqq \tfrac{1}{4}.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn die Form arithmetisch äquivalent der Form

$$(1.) \qquad (X - \tfrac{1}{2})(Y - \tfrac{1}{2}).$$

Ebenfalls ausgehend von geometrischen Betrachtungen fand ich einen arithmetischen Beweis dieses Satzes, der aber noch die Unterscheidung einer größeren Zahl von Unterfällen nötig machte. Es gelang Herrn *Frobenius*, hauptsächlich durch den Kunstgriff der Einführung des Produktes $\varphi(x_1)\cdot\varphi(x_1 + 1)$ in den Hilfssätzen II und III, meinen Beweis wesentlich abzukürzen. Mit seiner Zustimmung gebe ich den Beweis in dieser vereinfachten Form wieder.

Es kann $(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)$ durch Multiplikation mit einer reellen positiven Zahl $\sqrt{D}$ und durch Auflösung linearer Gleichungen auf die Form gebracht werden

$$f(x, y) = a(x - x_0)^2 + b(x - x_0)(y - y_0) + c(y - y_0)^2,$$

wo a, b, c, x_0, y_0 beliebige reelle Zahlen, die nur der Bedingung genügen

$$b^2 - 4ac = D > 0.$$

*) *H. Minkowski*, Diophantische Approximationen, Leipzig 1907, S. 42, Kap. II, § 11, oder: Math. Annalen, Bd. 54, „Über die Annäherung an eine reelle Größe durch rationale Zahlen“, S. 91—124; wiederabgedruckt: Ges. Abh., Bd. I, S. 320—352.

Es ist

$$|f(x,y)| \leqq \frac{\sqrt{D}}{4}$$

zu bestimmen.

Unterwirft man die Wertepaare x, y und x_0, y_0 derselben ganzzahligen Substitution mit der Determinante 1, so erhält man eine äquivalente Form $f'(x', y')$, die dasselbe Wertsystem darstellt wie $f(x, y)$.

Ich führe die Bezeichnung ein

$$f_0(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2.$$

Zunächst werde ein Spezialfall behandelt. Wenn ein Wertepaar ganzer rationaler Zahlen $\varkappa, \mu$ existiert, so daß

$$f_0(\varkappa, \mu) = 0,$$

so bestimme man λ, ν ganzzahlig so, daß

$$\varkappa\nu - \lambda\mu = 1,$$

mache die Substitution

$$x = \varkappa x' + \lambda y',$$
$$y = \mu x' + \nu y'$$

und die entsprechende für x_0, y_0.

Dann wird

$$a' = f_0(\varkappa, \mu) = 0,$$

also

$$f'(x', y') = (y' - y_0')[b'(x' - x_0') + c'(y' - y_0')],$$
$$D = b'^2 > 0.$$

Man bestimme y' ganzzahlig so, daß

$$|y' - y_0'| \leqq \tfrac{1}{2},$$

sodann x' ganzzahlig so, daß

$$\left|(x' - x_0') + \frac{c'}{b'}(y' - y_0)\right| \leqq \frac{1}{2}.$$

Es ergibt sich

$$|f'(x', y')| \leqq \frac{|b'|}{4} = \frac{\sqrt{D}}{4}.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn

(2.) $$|y' - y_0'| = \tfrac{1}{2}$$

und auch nur

(3.) $$\left|(x' - x_0') + \frac{c'}{b'}(y - y_0')\right| = \frac{1}{2}$$

bestimmbar ist. Wenn (2.) erfüllt ist, kann $y' - y_0'$ die Werte $\pm\frac{1}{2}$ annehmen, also lautet (3.)

$$\left|(x' - x_0') \pm \frac{c'}{2b'}\right| = \frac{1}{2}.$$

Das ist aber nur möglich, wenn $\frac{c'}{b'}$ eine ganze Zahl. Daraus folgt, daß $f(x, y)$ bis auf einen konstanten Faktor äquivalent ist der Ausnahmeform (1.).

Im folgenden sollen a, a' usw. stets von 0 verschieden sein.

Hilfssatz I: *Eine quadratische Form*

$$f_0(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2,$$

für die $b^2 - 4ac = D > 0$, *ist äquivalent einer Form*

$$f_0'(x', y') = a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2,$$

in der $|a'| < \sqrt{D}$.

Ist

(4.) $$|a| \geqq \sqrt{D},$$

so führe man in $f_0(x, y)$ eine ganzzahlige Substitution mit der Determinante 1 aus

$$x = \varkappa x' + y',$$
$$y = -x',$$

aus der

$$c' = f(1, 0) = a, \quad b' = 2\varkappa a - b$$

folgt. Man bestimme $\varkappa$ so, daß

(5.) $$|b'| \leqq |a|.$$

Dann wird

$$D = b'^2 - 4a'c' \quad \text{oder} \quad 4a'a = b'^2 - D.$$

Nach (4.) ist $D \leqq a^2$, nach (5.) ist $b'^2 \leqq a^2$. Da die Differenz zweier positiver Größen absolut genommen nicht größer sein kann als die größere der beiden, so ist

$$|4aa'| \leqq a^2 \quad \text{oder} \quad |a'| \leqq \frac{1}{4}|a|.$$

Sollte auch $|a'| \geqq \sqrt{D}$ sein, so wiederhole man das Verfahren. Es wird

$$|a^{(n)}| \leqq \frac{1}{4^n}|a|.$$

Nach einer endlichen Anzahl von Schritten muß erreicht werden, daß

$$|a^{(n)}| < \sqrt{D}.$$

Man nehme also für das Folgende an, es sei bereits

(6.) $$|a| < \sqrt{D}.$$

Man bestimme y_1 ganzzahlig so, daß

$$|y_1 - y_0| \leqq \frac{1}{2},$$

und setze

(7.) $$f(x, y_1) = \varphi(x) = ax^2 + gx + h.$$

Es ist

(8.) $$\overline{D} = g^2 - 4ah = (y_1 - y_0)^2 D \leqq \frac{1}{4} D.$$

Hilfssatz II: *Ist*

(9.) $$\varphi(x) = ax^2 + gx + h = a(x-p)(x-q)$$

so gegeben, daß die reellen Zahlen p und q der Bedingung

(10.) $$x_1 < p \leqq q < x_1 + 1$$

genügen, worin x_1 eine ganze rationale Zahl, so ist von den beiden Beziehungen

(11.) $$|\varphi(x_1)| \leqq \frac{|a|}{4},$$

(12.) $$|\varphi(x_1 + 1)| \leqq \frac{|a|}{4}$$

mindestens eine erfüllt.

Es ist

$$|\varphi(x_1) \cdot \varphi(x_1+1)| = |a^2(x_1 - p)(x_1 + 1 - p)(x_1 - q)(x_1 + 1 - q)|$$
$$= a^2 \left[(x_1 + \frac{1}{2} - p)^2 - \frac{1}{4}\right] \cdot \left[(x_1 + \frac{1}{2} - q)^2 - \frac{1}{4}\right] \leqq \frac{a^2}{16},$$

da wegen (10.)

$$|x_1 + \frac{1}{2} - p| < \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad |x_1 + \frac{1}{2} - q| < \frac{1}{2}.$$

Von den beiden Beziehungen (11.) und (12.) ist also mindestens eine erfüllt.

Hilfssatz III: *Ist* (9.) *so gegeben, daß eine ganze rationale Zahl x_1 existiert, derart, daß*

(13.) $$p < x_1 < q < x_1 + 1,$$

so ist von den beiden Beziehungen

(14.) $$|\varphi(x_1)| < \frac{\sqrt{D}}{2},$$

(15.) $$|\varphi(x_1 + 1)| < \frac{\sqrt{D}}{2}$$

mindestens eine erfüllt.

Unterwirft man die quadratische Form

$$F(x, y) = ax^2 + gxy + hy^2$$

der Substitution mit der Determinante 1

$$x = (x_1 + 1)x' + x_1 y',$$
$$y = \quad\quad x' + \quad y',$$

so wird

$$a' = F(x_1 + 1, 1) = \varphi(x_1 + 1),$$
$$h' = F(x_1, 1) \quad = \varphi(x_1).$$

Es ergibt sich

(16.) $$\overline{D} = g'^2 - 4a'h' = g'^2 - 4\varphi(x_1 + 1) \cdot \varphi(x_1)$$
$$= g'^2 + 4|\varphi(x_1 + 1) \cdot \varphi(x_1)|,$$

da wegen (13.) $\varphi(x_1)$ und $\varphi(x_1 + 1)$ entgegengesetzte Vorzeichen haben; also

$$\frac{\overline{D}}{4} \geqq |\varphi(x_1 + 1) \cdot \varphi(x_1)|.$$

Daraus folgt, daß von den Beziehungen (14.) und (15.) mindestens eine bestehen muß. Und zwar gilt wirklich das Ungleichheitszeichen. Denn andernfalls wäre

(17.) $$|\varphi(x_1)| = |\varphi(x_1 + 1)| = \frac{\sqrt{\overline{D}}}{2},$$

also folgt aus (16.)

(18.) $$g' = 0.$$

Nun ist aber allgemein

(19.) $$g' = 2a(x_1 + 1)x_1 + g(2x_1 + 1) + 2h = \varphi(x_1 + 1) + \varphi(x_1) - a.$$

Da $\varphi(x_1)$ und $\varphi(x_1 + 1)$ entgegengesetzte Vorzeichen haben, so folgt hier aus (17.) und (19.)

$$g' = -a \neq 0,$$

was (18.) widerspricht. Also besteht von den Beziehungen (14.) und (15.) mindestens eine mit dem Ungleichheitszeichen.

Versteht man jetzt unter $\varphi(x)$ die durch (7.) definierte Funktion, so genügt sie entweder den Voraussetzungen des Hilfssatzes II oder III. (Wenn mindestens eine der beiden Zahlen p und q, z. B. p, ganz, so ist

$$|\varphi(p)| = |f(p, y_1)| = 0 < \tfrac{1}{4}.)$$

Wenn also (10.) gilt, so ist nach (11.) oder (12.) und (6.)

$$|f(x_1 + \varepsilon, y_1)| = |\varphi(x_1 + \varepsilon)| \leqq \frac{|a|}{4} < \frac{\sqrt{\overline{D}}}{4}.$$

Wenn (13.) gilt, so ist nach (14.) oder (15.) und (8.)

$$|f(x_1 + \varepsilon, y_1)| = |\varphi(x_1 + \varepsilon)| < \frac{\sqrt{\overline{D}}}{2} \leqq \frac{\sqrt{\overline{D}}}{4}.$$

ε bedeutet hier eine der beiden Zahlen 0 oder 1. Damit ist der *Minkowski*sche Satz bewiesen.

Über *Lambert*sche Reihen.

Von Herrn *Konrad Knopp* in Berlin-Lichterfelde.

Einleitung.

J. H. Lambert hat in seiner „Architektonik“*) wie es scheint zum ersten Male die allgemein nach ihm benannte Reihe

$$L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} \tag{1.}$$

aufgestellt, indem er bemerkt, daß sie, nach steigenden Potenzen von x geordnet**), eine Potenzreihe liefert, bei der der Koeffizient von x^n die Anzahl $\tau(n)$ der Teiler von n angibt:

$$L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) x^n = x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 2x^5 + 4x^6 + \cdots .$$

Hierbei tritt der Koeffizient 1 nur beim ersten Gliede auf, alle andern Koeffizienten sind $\geqq 2$, und zwar sind sie dann und nur dann *gleich* 2, wenn der Exponent von n eine Primzahl ist. In der Reihe der Exponenten geben sich also die Primzahlen eindeutig dadurch zu erkennen, daß der zugehörige Koeffizient $= 2$ ist. Wegen dieser verführerisch nahen Beziehung zu den Primzahlproblemen ist die *Lambert*sche Reihe (1.) oft der Gegenstand von Untersuchungen geworden. Keinen Beitrag zu ihrem Studium glaubte man verschmähen zu dürfen, in der Hoffnung, so dem verborgenen Gesetz der Primzahlen vielleicht näherzukommen. Hierher

*) *J. H. Lambert*, Anlage zur Architektonik oder Theorie des Einfachen und Ersten in der philosophischen und mathematischen Erkenntnis. 2 Bände, Riga 1771; Bd. 2, S. 507 (§ 875).

**) Die von *Lambert* nicht berührten Konvergenzfragen werden in § 1 behandelt werden.

gehört eine Reihe von Arbeiten wie die von *T. Levi-Civita**), *H. Burhenne***), *M. Curtze****), über die von *G. Torelli* in seiner Arbeit „Sulla totalità dei numeri primi fino a un limite assegnato“†) zusammenhängend berichtet wird. Auch *Dirichlet*††) benutzt die *Lambert*sche Reihe und gründet darauf einen heuristischen Beweis für die Formel

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n \log n} [\tau(1) + \tau(2) + \cdots + \tau(n)] = 1.$$

Indessen hat in dieser Richtung kein wesentliches Resultat gezeitigt werden können und ist wohl auch kaum ein solches zu erwarten.

Von einigen weiteren Arbeiten, die die *Lambert*sche Reihe zum Gegenstande haben, soll in § 1 die Rede sein.

Lambert erwähnt an der genannten Stelle gleichzeitig die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{1 - x^n},$$

die eine Potenzreihenentwicklung liefert, bei der der Koeffizient von x^n gleich der Summe $\tau_1(n)$ der Teiler von n ist. *Lambert* hat hiernach ersichtlich das Bildungsgesetz der Koeffizienten a_n der Potenzreihe $\Sigma a_n x^n$ vollständig durchschaut, in die eine Reihe der Form

$$(2.) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{x^n}{1 - x^n}$$

entwickelt werden kann. Diese Reihen wollen wir darum kurz *Lambertsche Reihen* nennen; und ihr nach einer sogleich zu nennenden Richtung hin ausgebautes Studium soll den Gegenstand der vorliegenden Arbeit bilden.

In § 1 sollen die Konvergenzfragen erledigt und auf einige merkwürdige Identitäten und Umformungen hingewiesen werden, zu denen diese Reihen Anlaß geben.

---

*) Di una espressione analitica atta a rappresentare il numero dei numeri primi compresi in un determinato intervallo [Atti della Reale Accademia dei Lincei, Ser. 5, Bd. 4 (1895), S. 303—309].

**) Über das Gesetz der Primzahlen [Archiv der Mathematik und Physik, Ser. 1, Bd. 19 (1852), S. 442—449].

***) Notes diverses sur la série de *Lambert* et la loi des nombres premiers [Annali di Matematica pura ed applicata, Ser. 2, Bd. 1 (1868), S. 285—292].

†) Atti della Reale Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche, Napoli, Ser. 2, Bd. 11 (1902), S. 1—212 (S. 180—191).

††) Werke, Bd. 1, S. 354.

Nach den — im wesentlichen — vergeblichen Versuchen, Primzahl- oder Teilerprobleme mit Hilfe der *Lambert*schen Reihe (1.) zu lösen, hatte das analytische Verhalten der durch sie oder durch die verwandten Reihen (2.) dargestellten Funktionen die Aufmerksamkeit erregt. Hier ist insbesondere ein Resultat von Herrn *Franel**) zu nennen, der unter gewissen Einschränkungen bezüglich der Geschwindigkeit der Konvergenz der auftretenden Reihen den folgenden Satz bewies:

„Es seien für eine bestimmte ganze Zahl k die Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_{k\nu+l}}{k\nu+l} \qquad (l=0, 1, 2, \dots k-1)$$

konvergent, und es sei x_0 eine primitive k-te Einheitswurzel; dann ist bei radialer Annäherung aus dem Innern des Einheitskreises

$$\lim_{x=x_0}\left(1-\frac{x}{x_0}\right)\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_{k\nu}}{k\nu}.“$$

Aus diesem Satze ergab sich sofort eine wichtige und von Herrn *Franel* auch ausdrücklich hieraus gezogene Folgerung: Wenn die Summe auf der rechten Seite von 0 verschieden ist, so ist x_0 notwendig ein singulärer Punkt der durch die Reihe dargestellten Funktion. Findet nun dasselbe für unendlich viele verschiedene k statt — dies ist z. B. sicher der Fall, wenn alle $b_n > 0$ sind und $\Sigma \frac{b_n}{n}$ konvergiert —, so ist die Funktion in einer Menge von Punkten singulär, die auf der Peripherie des Einheitskreises überall dicht liegen; das bedeutet aber, daß die Funktion nicht über den Einheitskreis hinaus fortsetzbar ist.

Da für $b_n \equiv 1$ die Reihe $\Sigma \frac{b_n}{n}$ nicht konvergiert, so ist auf die *Lambert*sche Reihe (1.) der *Franel*sche Satz nicht anwendbar. Trotzdem ist auch die durch sie dargestellte Funktion $L(x)$ nicht über den Einheitskreis hinaus fortsetzbar. Für diese Tatsache lieferte Herr *C. Hansen***) einen allerdings sehr komplizierten Beweis, und gleichzeitig habe ich die

---

*) Sur la théorie des séries [Mathematische Annalen, Bd. 52 (1899), S. 529—549].

**) Démonstration de l'impossibilité du prolongement analytique de la série de *Lambert* et des séries analogues [Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger, Jahrgang 1907, S. 3—19]. Vgl. auch die Note desselben Verfassers: Note sur la sommation de la série de *Lambert* [Mathematische Annalen, Bd. 54 (1901), S. 604—607].

Nichtfortsetzbarkeit von $L(x)$ als Spezialfall eines viel allgemeineren Satzes hergeleitet*), den ich weiter unten angeben werde. Auf die allerelementarste Weise wurde diese Tatsache gelegentlich von Herrn *Landau* in seinen Vorlesungen bewiesen.

In § 2 werde ich den *Landau*schen Beweis für die Nichtfortsetzbarkeit der Funktion $L(x)$ geben und durch einen weiteren Ausbau der dabei zugrunde liegenden Methode den *Franel*schen Satz ohne jede Einschränkung beweisen. Gleichzeitig wird sich die Nichtfortsetzbarkeit vieler anderer Funktionen ergeben, die nicht unmittelbar durch den *Franel*schen Satz einbegriffen werden.

In § 3 werde ich statt der radialen Annäherung an den Randpunkt x_0 sogenannte „komplexe Annäherung" in Betracht ziehen. Hierunter ist dies zu verstehen: von x_0 aus ziehe man zwei in das Innere des Einheitskreises dringende Strahlen, die wir uns etwa symmetrisch zu dem nach x_0 gezogenen Radius denken wollen. Die Annäherung an x_0 soll dann auf beliebigen Wegen erfolgen dürfen, die ganz in dem durch diese Strahlen gebildeten „Winkelraum" verlaufen. Es zeigt sich, daß, wenn man nur die absolute Konvergenz von $\Sigma \frac{b_n}{n}$ voraussetzt, der *Franel*sche Satz auch für diese komplexe Annäherung noch gültig bleibt. Dieser Satz ist nicht neu, sondern von mir schon a. a. O. S. 27 ff. bewiesen. Sein Beweis soll hier nur skizziert werden, weil einige Einzelheiten desselben für das folgende notwendig sind.

Durch diesen Satz ist also eine asymptotische Auswertung der Reihe gegen alle Punkte x_0 der Form

$$x_0 = e^{2\pi i \frac{k'}{k}}$$

ermöglicht, wenn hierin k und k' ganze Zahlen bedeuten, die wir überdies stets teilerfremd annehmen wollen. Diese Punkte will ich kurz die „rationalen Randpunkte" nennen, da ihre Amplitude zu π in rationalem Verhältnis steht. Der in dem *Franel*schen Satz bei der Annäherung an einen solchen Randpunkt auftretende Grenzwert ist nun ersichtlich — allgemein zu reden — um so kleiner, je größer k ist. Diese Bemerkung

*) Grenzwerte von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze [Inaugural-Dissertation, Berlin 1907, S. 1—50], S. 31.

legt die Vermutung nahe, es möchte der entsprechende Grenzwert gleich 0 sein, wenn die Annäherung gegen einen irrationalen Randpunkt

$$\xi = e^{2\pi i\gamma} \qquad (\gamma \text{ irrational})$$

hin geschieht.

Ich werde in den §§ 4—6 zeigen — und hierin sehe ich das wesentlichste Resultat der vorliegenden Arbeit —, daß dies tatsächlich der Fall ist, wenn nur $\Sigma|b_n|$ konvergiert und wenn man sich auf radiale Annäherung beschränkt.

In § 4 werde ich den Satz präzis formulieren; in § 5 sollen die Methoden des § 3 ausgebaut und in § 6 mit ihrer Hilfe der genannte Satz bewiesen werden.

§ 7 endlich ist einigen Anwendungen und anderweitigen Bemerkungen gewidmet.

§ 1.

Um eine feste Grundlage für das folgende zu haben, geben wir zunächst den genauen Konvergenzbereich der *Lambert*schen Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{x^n}{1-x^n} \tag{2.}$$

an. Wie auch die b_n beschaffen sein mögen, es hat ersichtlich keinen Sinn, von Konvergenz in Punkten der Peripherie des Einheitskreises zu sprechen. Diese bildet sozusagen bezüglich der Konvergenz eine singuläre Linie*), und wir werden getrennt die Punkte innerhalb und außerhalb des Einheitskreises untersuchen müssen. Hier gilt nun der die Konvergenzfrage vollständig erledigende

Satz 1: *Wenn Σb_n konvergiert, so konvergiert die Reihe* (2.) *für jedes x, dessen Betrag von* 1 *verschieden ist. Ist Σb_n nicht konvergent, so ist das Konvergenzgebiet der Reihe* (2.) *das Innere des Konvergenzkreises der „assoziierten" Potenzreihe $\Sigma b_n x^n$.*

---

*) Dies hindert nicht, daß für gewisse ihrer Punkte die Reihe (2.) noch konvergent (sogar absolut konvergent) sein kann. Ist z. B. $\xi = e^{2\pi i\gamma}$ ein spezieller irrationaler Randpunkt und wählt man

$$b_n = \frac{1-\xi^n}{n^2}, \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

so ist ersichtlich die Reihe

$$\Sigma b_n \frac{x^n}{1-x^n}$$

im Randpunkte ξ noch (absolut) konvergent.

In jedem abgeschlossenen, ganz im Innern eines der Konvergenzgebiete gelegenen Teilgebiete ist die Konvergenz überdies gleichmäßig.

Der Beweis dieses einfachen Konvergenzsatzes darf wohl dem Leser überlassen bleiben. —

Im Falle der Konvergenz von Σb_n brauchen natürlich die im inneren und äußeren Konvergenzgebiet dargestellten Funktionen f_i und f_a nicht Fortsetzungen voneinander zu sein. Man findet zwischen ihnen indessen sofort die Beziehung

$$f_a(x) + f_i\left(\frac{1}{x}\right) = \text{konst.} = -\sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad (|x| > 1).$$

Wir wollen jedoch, wenn Σb_n konvergieren sollte, das äußere Konvergenzgebiet ganz außer acht lassen und uns auf das innere Gebiet beschränken.

Auf Grund des Konvergenzsatzes ist die schon in der Einleitung angedeutete Entwicklung einer *Lambert*schen Reihe (2.) in eine Potenzreihe gestattet; man hat

$$\frac{b_n x^n}{1-x^n} = \sum_{m=1}^{\infty} b_n x^{nm}$$

und also

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d/n} b_d\right) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n,$$

gültig für $|x| < \varrho = \text{Min}(r, 1)$, wenn mit r der Konvergenzradius der assoziierten Potenzreihe $\Sigma b_n x^n$ bezeichnet wird.

Die Beziehung

$$a_n = \sum_{d/n} b_d, \tag{3.}$$

in der die Koeffizienten a_n und b_n stehen, ist bekanntlich eindeutig umkehrbar, indem aus ihr

$$b_n = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) a_d \tag{4.}$$

folgt, wenn $\mu(m)$ die *Möbius*sche Funktion bezeichnet. Dies bedeutet aber: Nicht nur jede *Lambert*sche Reihe läßt sich — im inneren Konvergenzgebiet gültig — in eine Potenzreihe entwickeln, sondern auch umgekehrt jede Potenzreihe läßt sich durch eine *Lambert*sche Reihe darstellen. Ist also $f(x)$ eine für $x = 0$ reguläre Funktion, so läßt sie sich auf eine und nur eine Art in der Form

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{x^n}{1-x^n}$$

darstellen*), und das Konvergenzgebiet dieser Darstellung läßt sich unmittelbar angeben. — So ist z. B.

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \frac{x^n}{1-x^n} \quad \text{oder} \quad \frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) \frac{x^n}{1-x^n}.$$

Das dargelegte Prinzip der Entwicklung einer *Lambert*schen Reihe in eine Potenzreihe gibt Anlaß zu einer großen Reihe merkwürdiger Identitäten, indem allgemein

$$(5.) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sum_{m=1}^{\infty} x^{nm} = \sum_{m=1}^{\infty} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} b_n (x^m)^n \Big).$$

Ist also $F(x)$ die durch die *Lambert*sche Reihe und $g(x)$ die durch die „assoziierte" Potenzreihe $\Sigma b_n x^n$ (mit $r > 0$) definierte Funktion, so ist für $|x| < \text{Min}(r, 1)$

$$(6.) \qquad F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} g(x^m).$$

Setzt man hierin speziell

$$b_n = (-1)^{n-1},\ n,\ (-1)^{n-1} n,\ \frac{1}{n},\ \frac{(-1)^{n-1}}{n},\ \alpha^n,\quad \text{usw.}$$

so ergeben sich in einfachster Weise viele merkwürdige Identitäten, die sich als zufällige Ergebnisse in der hier angegebenen Literatur bewiesen finden und deren gemeinsame Quelle die Formel (6.) ist.

Zwecks späterer Anwendung sei nur die für $b_n = \frac{1}{n}$ sich ergebende Identität besonders erwähnt:

$$(7.) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{1-x^n} = -\log \prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n),$$

die das in so vieler Hinsicht merkwürdige *Euler*sche Produkt $\Pi(1-x^n)$ mit den *Lambert*schen Reihen in Beziehung bringt**).

Neben diesen allgemeinen Identitäten sind noch speziell von der *Lambert*schen Reihe (1.) interessante Umformungen gegeben worden, zu

---

*) Diese Tatsache ist schon von Herrn *S. Pincherle*, Sopra alcuni sviluppi in serie per funzioni analitiche [Memorie della Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna, Ser. 4, Bd. 3 (1882), S. 151—180], bemerkt worden, der allgemeine Typen von Funktionen aufstellt, nach denen eine jede reguläre Funktion entwickelt werden kann; er stößt dabei u. a. auf die *Lambert*schen Reihen.

**) Dieses Produkt sowie seine merkwürdige Entwicklung in eine Potenzreihe ist von *Euler* zu wiederholten Malen zum Gegenstand von Untersuchungen gemacht worden. Nähere Literaturangaben hierüber s. Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées, Tome I, vol. 3, S. 218 u. 219.

deren schönsten wohl die von *Clausen**) herrührende gehört, für die *Scherk***) einen sehr einfachen Beweis angegeben hat.

*Eisenstein****) hat die Reihe (1.) durch einen für $|x| < 1$ konvergenten Kettenbruch dargestellt. —

Von der durch die Reihe (1.) dargestellten Funktion $L(x)$ sind neben diesen Darstellungen noch verschiedene asymptotische Auswertungen gegen $+1$ hin (unter Beschränkung auf reelle $x < 1$) angegeben worden. Hier sind mehrere Arbeiten von *Schlömilch*†), *Cesàro*††) und insbesondere von *Stieltjes*†††) zu nennen. — Endlich sei noch auf die engen Beziehungen hingewiesen, die zwischen $L(x)$ und anderen analytischen Funktionen, wie der *Riemann*schen ζ-Funktion, den Θ-Funktionen u. a. bestehen, worüber *Schlömilch*†*), *de la Vallée Poussin*†**) u. a. interessante Resultate gefunden haben. —

Ganz analog der Hauptidentität (6.) hat man

---

*) Beitrag zur Theorie der Reihen [Dieses Journal, Bd. 3 (1828), S. 92—95], S. 95.

**) Bemerkungen über die *Lambert*sche Reihe [Dieses Journal, Bd. 9 (1832), S. 162—168].

***) Transformations remarquables de quelques séries [Dieses Journal, Bd. 27 (1844), S. 193—197], S. 195.

†) Über die *Lambert*sche Reihe [Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 6 (1861), S. 407—415]. — Extrait d'une lettre adressée à *M. Liouville* [Journal de mathématiques pures et appliquées, Sér. 2, Bd. 8 (1863), S. 99—101). — Notiz über die *Lambert*sche Reihe [Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 29 (1884), S. 384].

††) Sur quelques conséquences asymptotiques de la série de *Lambert* [Jornal de Sciencas Mathematicas e Astronomicas publicado pelo Dr. *F. Gomes Teixeira*, Coimbra, Bd. 6 (1884), S. 91—95]. — Sur la série de *Lambert* [Nouvelles Annales de Mathématiques, Sér. 3, Bd. 5 (1886), S. 106—109]. — Sur l'evaluation approchée de certaines séries [ebenda S. 449—456]. — La serie di *Lambert* in Aritmetica assintotica [Rendiconti dell' Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, Ser. 2, Bd. 7 (1893), S. 197—204]. — Vgl. auch *Cesàro-Kowalewski*, Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis, Leipzig 1904, S. 174—177 und S. 286—287.

†††) Recherches sur quelques séries semi-convergentes [Annales de l'École Normale Supérieure, Ser. 3, Bd. 3 (1886), S. 201—258].

†*) Fußnote in einer Mitteilung von *G. Zehfuß* [Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 3 (1858), S. 248].

†**) Sur la série de *Lambert* [Annales de la société scientifique de Bruxelles, Bd. 20 (1re partie) (1896), S. 56—62].

(8.) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n x^n}{1-x^{2n}} = \sum_{m=0}^{\infty} g(x^{2m+1}) \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n x^n}{1+x^{2n}} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m g(x^{2m+1}),$$

wenn wieder $\Sigma b_n x^n = g(x)$ gesetzt wird.

Die zweite dieser Identitäten ergibt z. B. für $b_n = 1$ sofort, daß die von *Weierstraß* untersuchte Reihe

(9.) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{1-x^{2m+1}}$$

ist. Sie lieferte ihm das — historisch erste — Beispiel einer nicht fortsetzbaren Funktion. Ihre Darstellung (9.) durch eine *Lambert*sche Reihe subsumiert die Tatsache ihrer Nichtfortsetzbarkeit unter den allgemeinen Satz 3 des folgenden Paragraphen. —

§ 2.

Um die Nichtfortsetzbarkeit der durch (1.) dargestellten Funktion $L(x)$ über den Einheitskreis hinaus zu beweisen, genügt es offenbar, eine auf der Peripherie des Einheitskreises überall dicht gelegene Menge von Punkten anzugeben, in deren Nähe $L(x)$ beliebig großer Werte fähig ist. Dies läßt sich für alle rationalen Randpunkte

$$x_0 = e^{2\pi i \frac{k'}{k}}$$

zeigen, indem sogar

$$\left(1 - \frac{x}{x_0}\right) L(x)$$

gegen ∞ strebt, wenn sich x radial dem Randpunkte x_0 nähert.

Zerlegt man

(1.) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$$

in zwei Teile Σ_1 und Σ_2, jenachdem $n \equiv 0$ oder $\not\equiv 0 \pmod{k}$ ist, so wird, wenn man noch

$$x = \varrho e^{2\pi i \frac{k'}{k}}$$

setzt:

$$\Sigma_1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{k\nu}}{1-x^{k\nu}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varrho^{k\nu}}{1-\varrho^{k\nu}},$$

also

$$\lim_{\varrho=1} (1-\varrho)\, \Sigma_1 = \lim_{\varrho=1} \frac{1-\varrho}{1-\varrho^k} (1-\varrho^k) \Sigma_1 = \frac{1}{k} \lim_{y=1} (1-y)\, \Sigma \frac{y^n}{1-y^n}.$$

Es ist hiermit die Untersuchung der Annäherung an einen beliebigen rationalen Randpunkt im wesentlichen auf die an den Randpunkt $+1$ zurückgeführt. Nun ist für $0 < y < 1$

$$(1-y)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{1-y^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{1+y+\cdots+y^{n-1}}>\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n}=\log\frac{1}{1-y}$$

und wird also unendlich groß, wenn y sich wachsend dem Werte $+1$ nähert. Also ist

$$\lim_{x=x_0}\left(1-\frac{x}{x_0}\right)\Sigma_1=+\infty,$$

und unsere Behauptung wäre bewiesen, wenn man noch zeigte, daß

$$\left|\left(1-\frac{x}{x_0}\right)\Sigma_2\right|<K$$

bleibt, bei der Annäherung von x an x_0.

Ist aber n nicht durch k teilbar, so ist x_0^n einer der $k-1$ von $+1$ verschiedenen Eckpunkte des dem Einheitskreise einbeschriebenen regulären k-Ecks, dessen eine Ecke in $+1$ liegt. Daher gibt es eine positive Größe h (nämlich $h=\sin\frac{2\pi}{k}$, falls $k>2$, und $h=1$, falls $k=2$), so daß

$$|1-x^n|=|1-\varrho^n e^{2\pi i n\frac{k'}{k}}|\geqq h$$

ist für alle nicht durch k teilbaren n und alle $0\leqq\varrho\leqq 1$. Daher ist

$$\left|\left(1-\frac{x}{x_0}\right)\Sigma_2\right|<(1-\varrho)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^n}{h}=\frac{\varrho}{h}\leqq\frac{1}{h}=K,$$

womit die Behauptung schon vollständig bewiesen ist:

Satz 2: *Die Lambertsche Reihe* (1.) *stellt eine über den Einheitskreis hinaus nicht fortsetzbare analytische Funktion dar.*

Eine etwas vorsichtigere Ausnutzung der soeben angewandten Methode liefert uns einen Beweis des Satzes:

Satz 3: *Sind die Koeffizienten b_n der Lambertschen Reihe*

$$(10.)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}b_n\frac{x^n}{1-x^n}$$

so beschaffen, daß für ein bestimmtes ganzzahliges k alle k Reihen

$$(11.)\qquad \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{b_{k\nu+l}}{k\nu+l}\qquad (l=0,1,2,\ldots k-1)$$

konvergieren, so ist, wenn für ein solches k und ein dazu teilerfremdes k'

$$e^{2\pi i\frac{k'}{k}}=x_0$$

gesetzt wird, bei radialer Annäherung

$$(12.)\qquad \lim_{x=x_0}\left\{\left(1-\frac{x}{x_0}\right)\sum_{n=1}^{\infty}b_n\frac{x^n}{1-x^n}\right\}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{b_{k\nu}}{k\nu}.$$

Dies ist der von Herrn *Franel* a. a. O.*) bewiesene Satz**), jedoch ohne die von ihm gemachten Einschränkungen bezüglich der Geschwindigkeit der Konvergenz der Reihen (11.).

Aus der Formel (12.) folgt speziell, daß die durch die *Lambert*sche Reihe (10.) dargestellte Funktion sicher dann eine nicht über den Einheitskreis fortsetzbare Funktion darstellt, wenn die Voraussetzungen des Satzes für unendlich viele k erfüllt sind und zugleich $\Sigma \frac{b_{k\nu}}{k\nu}$ einen von 0 verschiedenen Wert hat, also z. B. stets, wenn $b_n > 0$ ist und $\Sigma \frac{b_n}{n}$ konvergiert***).

---

*) S. Anm. *), S. 286.

**) Eine spezielle unter diesen Satz fallende Formel ist im Intermédiaire des Mathématiciens, Bd. 6 (1899), auf eine Frage von *Franel* hin (S. 6, Aufgabe 1437) von *Cesàro* bewiesen worden (S. 189). Doch bezeichnet *Cesàro* selbst den Beweis als „peu rigoureux".

***) Man könnte vermuten, daß die Annahme, die Reihen (11.) seien für unendlich viele k sämtlich konvergent, es notwendig zur Folge habe, daß $\Sigma \frac{b_n}{n}$ absolut konvergiere. Dem ist jedoch nicht so, wie das folgende Beispiel lehrt:

Es sei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} = 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} - \cdots,$$

indem allgemein $(2n-1)$-mal das Glied $+\frac{1}{(2n-1)^2}$ und sodann $2n$-mal das Glied $-\frac{1}{(2n)^2}$ gesetzt wird, für $n = 1, 2, \ldots$. Man überzeugt sich leicht, daß die sämtlichen Partialreihen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_{k\nu+l}}{k\nu+l}, \qquad (k=1, 2, \ldots;\ l=0, 1, 2, \ldots k-1)$$

konvergent sind. Denn faßt man in der der arithmetischen Progression $k\nu + l$ entsprechenden Partialreihe jeweils die Glieder mit gleichem Vorzeichen zusammen, so entsteht eine Reihe der Form

$$\sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{c_r}{r^2},$$

bei der die c_r von einer gewissen Stelle an positive ganze Zahlen sind und der Bedingung

$$\frac{r-k+1}{k} \leqq c_r \leqq \frac{r+k-1}{k}$$

genügen, d. h. um höchstens 1 größer oder kleiner als $\left[\frac{r}{k}\right]$ sind. Hieraus folgt aber leicht, daß die betrachteten Partialreihen konvergieren.

Trotzdem ist $\Sigma \left|\frac{b_n}{n}\right|$ divergent.

Beweis. Ich setze wieder

$$x = \varrho e^{2\pi i \frac{k'}{k}},$$

so daß ϱ durch reelle Werte gegen $+1$ zu wachsen hat und

$$\lim_{\varrho=1} (1-\varrho) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{x^n}{1-x^n}$$

zu bestimmen ist. Ich zerlege wieder die Reihe (10.) in die Teile Σ_1 und Σ_2, je nachdem n durch k teilbar ist oder nicht, und bestimme zunächst

$$\lim_{\varrho=1} (1-\varrho)\,\Sigma_1 = \lim_{\varrho=1} (1-\varrho) \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{k\nu} \frac{\varrho^{k\nu}}{1-\varrho^{k\nu}}$$

$$= \lim_{\varrho=1} \frac{1-\varrho}{1-\varrho^k} \cdot (1-\varrho^k) \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{k\nu} \frac{\varrho^{k\nu}}{1-\varrho^{k\nu}} = \frac{1}{k} \lim_{y=1} (1-y) \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{k\nu} \frac{y^\nu}{1-y^\nu},$$

d. h. ich bestimme

$$\lim_{y=1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_{k\nu}}{k\nu} \frac{\nu y^\nu}{1+y+\cdots+y^{\nu-1}}.$$

Die hier auftretende Reihe konvergiert für $0 < y < 1$; sie konvergiert auch noch für $y = 1$ und hat den Wert $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_{k\nu}}{k\nu}$; ließe sich zeigen, daß sie für $0 \leqq y \leqq 1$ gleichmäßig konvergiert, so folgte sofort, daß der gesuchte Grenzwert vorhanden und gleich

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_{k\nu}}{k\nu}$$

ist. Die gleichmäßige Konvergenz findet nun tatsächlich statt, wie sich folgendermaßen zeigen läßt:

Ich setze zur Abkürzung

$$\frac{\nu y^\nu}{1+y+\cdots+y^{\nu-1}} = y_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{13.}$$

und

$$\frac{b_{k\nu}}{k\nu} = c_\nu, \quad \text{so daß} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu$$

konvergent ist. Die Reste dieser Reihe bezeichne ich mit

$$r_\nu = \sum_{\lambda=\nu+1}^{\infty} c_\lambda. \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

Dann ist $c_\nu = r_{\nu-1} - r_\nu$ und also

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_{k\nu}}{k\nu} \cdot \frac{\nu y^\nu}{1+y+\cdots+y^{\nu-1}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu y_\nu \tag{14.}$$

und

$$\sum_{\nu=m+1}^{m+p} c_\nu y_\nu = \sum_{\nu=m+1}^{m+p} (r_{\nu-1} - r_\nu) y_\nu \qquad (m \geqq 0,\ p \geqq 1)$$

$$= -\sum_{\nu=m+1}^{m+p} r_\nu (y_\nu - y_{\nu+1}) + r_m y_{m+1} - r_{m+p} y_{m+p+1}.$$

Läßt man hierin p unendlich groß werden, so ist, da für jedes $0 \leqq y \leqq 1$ und alle $\nu \geqq 1$

$$y_\nu = \frac{y^\nu + y^\nu + \cdots + y^\nu}{1 + y + \cdots + y^{\nu-1}} \leqq 1$$

ist,

$$\lim_{p=\infty} r_{m+p} y_{m+p+1} = 0 .$$

Also ist

$$\sum_{\nu=m+1}^{\infty} c_\nu y_\nu = - \sum_{\nu=m+1}^{\infty} r_\nu (y_\nu - y_{\nu+1}) + r_m y_{m+1} .$$

Wählt man nun bei gegebenem $\varepsilon > 0$ m so groß, daß für alle $\nu \geqq m$

$$|r_\nu| < \frac{\varepsilon}{2}$$

bleibt, so folgt weiter

$$\left| \sum_{\nu=m+1}^{\infty} c_\nu y_\nu \right| \leqq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{\nu=m+1}^{\infty} |y_\nu - y_{\nu+1}| + \frac{\varepsilon}{2} ,$$

wofern die rechts auftretende Summe einen Sinn hat. Dies ist aber für $y = 1$ sicher der Fall, da dann alle ihre Glieder $= 0$ sind. Für jedes $0 < y < 1$ und jedes ν ist aber $y_\nu - y_{\nu+1}$ positiv, denn das Vorzeichen dieser Differenz ist gemäß der Bedeutung (13.) von y_ν gleich dem von

$$\nu y^\nu (1 + y + \cdots + y^\nu) - (\nu + 1) y^{\nu+1} (1 + y + \cdots + y^{\nu-1})$$

oder gleich dem von

$$\nu (1 + y + \cdots + y^\nu) - \nu y (1 + y + \cdots + y^{\nu-1}) - y (1 + y + \cdots + y^{\nu-1})$$

oder also gleich dem von

$$\nu - (y + y^2 + \cdots + y^\nu),$$

d. h. sicher positiv. Daher ist die in Rede stehende Summe, da für $0 \leqq y < 1$

$$\lim_{\nu=\infty} y_\nu = 0$$

ist, konvergent und gleich y_{m+1} oder gleich 0, je nachdem $y < 1$ oder $= 1$ ist; sie ist also in beiden Fällen $\leqq 1$. Also ist für alle $0 \leqq y \leqq 1$

$$\left| \sum_{n=m+1}^{\infty} c_\nu y_\nu \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon ,$$

und da dieselbe Abschätzung a fortiori für jedes größere m gilt, so ist die Reihe (14.), wie behauptet, gleichmäßig konvergent im Intervalle $0 \leqq y \leqq 1$. Daher folgt, wie schon oben bemerkt, daß

$$\lim_{x=x_0} \left\{ \left(1 - \frac{x}{x_0}\right) \Sigma_1 \right\} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_{k\nu}}{k\nu}$$

ist. Der Satz 3 wäre hiernach vollständig bewiesen, wenn noch gezeigt würde, daß

$$\lim_{x=x_0}\left\{\left(1-\frac{x}{x_0}\right)\Sigma_2\right\}=0 \tag{15.}$$

oder daß für jedes $l=1,2,\dots k-1$

$$\lim_{x=x_0}\left\{\left(1-\frac{x}{x_0}\right)\sum_{\nu=1}^{\infty} b_{k\nu+l}\,\frac{x^{k\nu+l}}{1-x^{k\nu+l}}\right\}=0 \tag{16.}$$

ist. Setze ich jetzt $\frac{b_{k\nu+l}}{k\nu+l}=d_\nu$, so daß Σd_ν konvergiert, so genügt es wieder, zu zeigen, daß

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu\,\frac{(k\nu+l)\,x^{k\nu+l}(1-\varrho)}{1-x^{k\nu+l}}$$

für $0\leqq\varrho\leqq 1$ gleichmäßig konvergiert. Setzt man $x^k=\varrho^k=y$, so bedeutet dies, daß für $0\leqq y\leqq 1$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu\,\frac{(k\nu+l)\,y^\nu}{1+y+\cdots+y^{\nu-1}}\cdot\frac{1-y^\nu}{1-x^l y^\nu}$$

gleichmäßig konvergieren soll. Setzt man

$$d_\nu\,\frac{(k\nu+l)\,y^\nu}{1+y+\cdots+y^{\nu-1}}=f_\nu(y),$$

so zeigt man genau wie soeben, daß

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(y) \qquad \text{für} \qquad 0\leqq y\leqq 1$$

gleichmäßig konvergiert. Setze ich also

$$\sum_{\nu=m+1}^{\infty} f_\nu(y)=F_m(y),$$

so ist bei gegebenem $\varepsilon>0$ N so bestimmbar, daß für alle $m\geqq N$ und alle $0\leqq y\leqq 1$

$$|F_m(y)|<\varepsilon.$$

Setze ich nun zur Abkürzung

$$\frac{1-y^\nu}{1-x^l y^\nu}=y_\nu,$$

so ist für alle $0\leqq y\leqq 1$ und alle ν

$$|y_\nu|<\frac{1}{h},$$

wenn mit h die sicher vorhandene und positive untere Schranke von $|1-x^l y^\nu|$ bezeichnet wird. Dann ist aber genau wie oben

$$\sum_{\nu=m+1}^{\infty} f_\nu(y)\,y_\nu=\sum_{\nu=m+1}^{\infty}(F_{\nu-1}-F_\nu)\,y_\nu=-\sum_{\nu=m+1}^{\infty}F_\nu\,(y_\nu-y_{\nu+1})+F_m\,y_{m+1},$$

also

$$\left|\sum_{\nu=m+1}^{\infty} f_\nu(y)\,y_\nu\right|\leqq\varepsilon\sum_{\nu=m+1}^{\infty}|y_\nu-y_{\nu+1}|+\varepsilon\cdot\frac{1}{h},$$

wofern die rechts auftretende Summe einen Sinn hat. Das ist aber der Fall, denn ihr allgemeines Glied ist

$$= \left| \frac{1-y^\nu}{1-x^l y^\nu} - \frac{1-y^{\nu+1}}{1-x^l y^{\nu+1}} \right| \leqq \frac{1}{h^2} \left| y^\nu (1-y) - x^l y^\nu (1-y) \right| \leqq \frac{2}{h^2} y^\nu (1-y).$$

Sie ist also konvergent und ihre Summe $\leqq \frac{2}{h^2}$. Folglich ist für $m \geqq N$

$$\left| \sum_{\nu=m+1}^{\infty} f_\nu(y)\, y_\nu \right| \leqq \varepsilon \left(\frac{2}{h^2} + \frac{1}{h} \right),$$

womit die gleichmäßige Konvergenz der in Rede stehenden Reihe bewiesen ist. Also ist für jedes $l = 1, 2, \ldots k-1$

$$\lim_{x=x_0} \left\{ \left(1 - \frac{x}{x_0}\right) \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{k\nu+l} \frac{x^{k\nu+l}}{1-x^{k\nu+l}} \right\} = 0$$

und demnach auch die Beziehung (15.) bewiesen. Zusammen mit dem vorigen Resultat ergibt sich also für radiale Annäherung an den Randpunkt $x_0 = e^{2\pi i \frac{k'}{k}}$ die Beziehung (12.), womit Satz 3 vollständig bewiesen ist.

Wie schon betont, folgt hieraus ganz speziell die Nichtfortsetzbarkeit der durch die Reihe (10.) im Einheitskreise dargestellten Funktion, wenn alle $b_n > 0$ sind und $\Sigma \frac{b_n}{n}$ konvergiert. Daß diese letzte Voraussetzung nicht nur eine zufällig aus dem Beweisverfahren sich ergebende ist, erkennt man aus der schon in § 1 angeführten Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) \frac{x^n}{1-x^n},$$

bei der alle Koeffizienten > 0 sind, während die dargestellte Funktion $= \frac{x}{(1-x)^2}$ und also sicher über den Einheitskreis hinaus fortsetzbar ist.

Ist speziell $b_n = \frac{1}{n^s}$ und $\Re(s) > 0$, so liefert (12.) die Beziehung

$$\text{(17.)} \qquad \lim_{x=x_0} \left\{ \left(1 - \frac{x}{x_0}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \frac{x^n}{1-x^n} \right\} = \frac{1}{k^{s+1}} \zeta(s+1),$$

wenn $\zeta(z)$ die für $\Re(z) > 1$ durch $\Sigma \frac{1}{n^z}$ definierte *Riemann*sche ζ-Funktion bezeichnet. Da diese bekanntlich für $\Re(z) > 1$ niemals 0 ist, so folgt aus (17.), daß keine der durch die Reihen

$$\text{(17}^\text{a}\text{.)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \frac{x^n}{1-x^n}$$

dargestellten Funktionen über den Einheitskreis hinaus fortsetzbar ist, falls $\Re(s) > 0$ ist. In § 7 wird gezeigt werden, daß dies auch für alle $\Re(s) < 0$ zutrifft.

Auch die Nichtfortsetzbarkeit der von *Weierstraß* behandelten Funktion (9.) ergibt sich infolge ihrer Darstellung durch die *Lambert*sche Reihe nun aus dem Satz 3, da hier für jedes ungerade k die Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_{k\nu+l}}{k\nu+l} \qquad (l=0, 1, 2, \ldots k-1)$$

konvergent sind und eine von 0 verschiedene Summe haben.

§ 3.

In diesem Paragraph soll der Satz 3 auf Grund ganz anderer Methoden hergeleitet werden; dabei wird sich eine Erweiterung nach zwei Seiten ergeben: einmal soll statt der radialen Annäherung die komplexe Annäherung im Winkelraum Δ in Betracht gezogen werden, sodann werden in mancher Hinsicht allgemeinere Klassen für die Koeffizienten b_n zugelassen werden.

Die Grundlage hierfür bildet der folgende, in seiner einfachsten Form von *Cesàro**) stammende, von Herrn *Pringsheim***) auf komplexe Annäherung erweiterte

Satz 4: *Es seien $\Sigma a_n x^n$ und $\Sigma d_n x^n$ zwei Potenzreihen mit dem Konvergenzradius* 1, *deren zweite positive Koeffizienten hat und für $x=1$ divergiert. Sie habe ferner die Eigenschaft, daß für alle im Winkelraum Δ hinreichend nahe bei $+1$ gelegenen x*

$$\frac{\left|\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n\right|}{\sum_{n=0}^{\infty} |d_n x^n|} \geqq \alpha > 0 \tag{18.}$$

*ist****). *Ist dann*

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{d_n} = g, \tag{19.}$$

so ist auch für jede Annäherung im Winkelraum

$$\lim_{x=+1} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n} = g. \tag{20.}$$

---

*) Démonstration d'un théorème de M. *Appell* [Mathesis, 1893, S. 241].

**) Über den Divergenzcharakter gewisser Potenzreihen [Acta mathematica, Bd. 28 (1904), S. 1—30].

***) Wenn eine Reihe $\Sigma d_n x^n$ für alle im Winkelraum Δ hinreichend nahe bei $+1$ gelegenen x die Bedingung (18.) erfüllt, so nennt sie Herr *Pringsheim* „gleichmäßig divergent bei $x=+1$".

Es sei hier kurz der sehr einfache Beweis skizziert, den ich in der auf S. 287, Anm., zitierten Arbeit gegeben habe:

Man setzt

$$\frac{a_n}{d_n} = g + \varepsilon_n,$$

so daß

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$$

und

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n} = g + \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n d_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n}$$

ist. Wählt man nun nach Angabe von $\varepsilon > 0$ m so groß, daß für alle $n > m$ stets

$$|\varepsilon_n| < \varepsilon$$

ist, so folgt

$$\left| \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n} - g \right| < \frac{\sum_{n=0}^{m} |\varepsilon_n d_n x^n|}{\left|\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n\right|} + \varepsilon \frac{\sum_{n=0}^{\infty} |d_n x^n|}{\left|\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n\right|}.$$

Da nun wegen der Divergenz von $\Sigma |d_n|$ und der Voraussetzung (18.) sicher

$$\lim_{x=+1} |\Sigma d_n x^n| = +\infty$$

ist für jede Annäherung im Winkelraum, so folgt hieraus unmittelbar die Behauptung.

Setzt man

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n = A_n, \quad d_0 + d_1 + \cdots + d_n = D_n,$$

und bemerkt, daß für $|x| < 1$

$$(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

und ebenso

$$(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} D_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$$

ist, und endlich daß neben (18.) auch eine Beziehung der Form

$$\frac{\left|\sum_{n=0}^{\infty} D_n x^n\right|}{\sum_{n=0}^{\infty} |D_n x^n|} \geqq \alpha' > 0$$

gelten wird*), so ergibt sich, daß der Satz auch noch gültig bleibt, wenn man statt (19.) nur die Voraussetzung

$$(21.) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{A_n}{D_n} = \lim_{n=\infty} \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{d_0 + d_1 + \cdots + d_n} = g$$

macht. Zur Erfüllung derselben ist bekanntlich (19.) zwar hinreichend, aber nicht notwendig.

Mit Hilfe des so erweiterten Satzes 4 läßt sich nun der Satz 3 für komplexe Annäherung aussprechen, doch sind wir dafür genötigt, die absolute Konvergenz von $\Sigma \frac{b_n}{n}$ vorauszusetzen**):

Satz 5: *Ist*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{x^n}{1-x^n}$$

eine beliebige Lambertsche Reihe, bei der $\Sigma \left|\frac{b_n}{n}\right|$ *konvergiert, und ist* $x_0 = e^{2\pi i \frac{k'}{k}}$ *(*k, k' *ganz und teilerfremd), so ist bei beliebiger Annäherung im Winkelraum*

$$(22.) \qquad \lim_{x=r_0} \left\{ \left(1 - \frac{x}{x_0}\right) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{x^n}{1-x^n} \right\} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_{k\nu}}{k\nu}.$$

Der von mir a. a. O. S. 28—29 gegebene Beweis werde hier nur in den Hauptpunkten angegeben.

Ersetzt man in (22.) x durch $x_0 x$ und die *Lambert*sche Reihe durch ihre Potenzreihenentwicklung, so handelt es sich um den Beweis der Formel

$$\lim_{x=+1} \left\{ (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} (a_n x_0^n) x^n \right\}, \text{ d. h. } \lim_{x=+1} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (a_n x_0^n) x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} x^n} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_{k\nu}}{k\nu},$$

und hierzu würde es nach Satz 4 und seiner Erweiterung zu zeigen genügen, daß

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n}{n} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_{k\nu}}{k\nu}.$$

Ersetzt man aber linker Hand a_n durch seinen Wert aus (3.), so ergibt sich unmittelbar die Abschätzung

$$(23.) \qquad \left| (a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n) - \sum_{k\nu \leq n} b_{k\nu} \left[\frac{n}{k\nu}\right] \right| < k \sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu|.$$

*) Bezüglich der Einzelheiten sei auf die zitierten Arbeiten von Herrn *Pringsheim* und von mir verwiesen.

) S. Anm. *), S. 294.

Hieraus erschließt man das Bestehen der ebengenannten Beziehung, und damit ist dann auch Satz 5 bewiesen.

Richtet man sein Augenmerk nur auf die Tatsache, daß sich durch den bewiesenen Satz der Randpunkt x_0 als ein singulärer Punkt der durch die Reihe dargestellten Funktion erweist $\left(\text{wofern nur } \Sigma \frac{b_{k\nu}}{k\nu} \neq 0 \text{ ist}\right)$, und daß also diese Funktion nicht über den Einheitskreis hinaus fortsetzbar sein kann, falls solche Punkte überall dicht auf dem Rande gelegen sind, so kann man mit derselben Methode den folgenden allgemeineren Satz beweisen:

Satz 6: *Eine im Einheitskreise konvergente Lambertsche Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{x^n}{1-x^n} \tag{2.}$$

mit positiven Koeffizienten stellt eine über den Einheitskreis hinaus nicht fortsetzbare Funktion stets dann dar, wenn für unendlich viele k die Beziehung

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu}{n \sum_{k\nu \leq n} \frac{b_{k\nu}}{k\nu}} = 0 \tag{24.}$$

erfüllt ist.

Falls $\Sigma \frac{b_n}{n}$ konvergiert, ist diese Bedingung für jedes k erfüllt. Sie ist es, wie man sofort erkennt, für unendlich viele k auch in den folgenden Fällen:

a) $b_n = 1$; dies liefert die *Lambert*sche Reihe (1.) und also einen neuen Beweis für die Nichtfortsetzbarkeit der durch sie dargestellten Funktion $L(x)$.

b) $b_n = 1$ oder 0, je nachdem n eine Primzahl ist oder nicht. Dies liefert die Nichtfortsetzbarkeit der durch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{p_n}}{1-x^{p_n}} \qquad (p_n = n\text{-te Primzahl})$$

dargestellten Funktion. Das Gleiche gilt von jeder Reihe der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{c_n}}{1-x^{c_n}},$$

wenn hierin $c_1, c_2, \ldots$ irgendwelche wachsende ganze Zahlen sind, für die die Beziehung

$$\lim_{m=\infty} \frac{C(m)}{m} = 0$$

gilt, bei der $C(m)$ die Anzahl der nicht oberhalb m gelegenen c_n bedeuten soll.

Beweis. Aus der Beziehung (23.) ergibt sich, wenn $b_n \geqq 0$ ist, weiter die Abschätzung

$$\left| a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n - n \sum_{k\nu \leqq n} \frac{b_{k\nu}}{k\nu} \right| < (k+1) \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu .$$

Ist also (24.) erfüllt, so heißt dies:

Wenn

$$n \sum_{k\nu \leqq n} \frac{b_{k\nu}}{k\nu} = D_n$$

und die nicht negative Differenz

$$D_n - D_{n-1} = d_n, \quad (D_1 = d_1) \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

gesetzt wird, so ist — jedenfalls bei radialer Annäherung —

$$\lim_{x=1} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (a_n x_0^n)\, x^n}{\sum_{n=1}^{\infty} d_n x_n} = 1 .$$

Da aber

$$D_n = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$$

mit n sicher positiv unendlich wird, da also die Summe der Koeffizienten der Potenzreihe $\Sigma d_n x^n$ eine divergente Reihe nicht negativer Glieder bildet, so wird die Summe dieser Potenzreihe und folglich auch diejenige von

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n x_0^n)\, x^n$$

unendlich groß, wenn x radial gegen $+1$ rückt. Dies bedeutet aber, daß der Randpunkt x_0 ein singulärer Punkt der durch die *Lambert*sche Reihe (2.) dargestellten Funktion ist.

Hat man genauere Kenntnis über das Wachstum der D_n, so wird man auch in den Fällen, in denen $\Sigma \left| \frac{b_n}{n} \right|$ nicht konvergiert, aber die Bedingung (24.) erfüllt ist, genauere Grenzbeziehungen analog der Formel (12.) angeben können*).

§ 4.

Die bisher bewiesenen Sätze gestatten unter bestimmten Voraus-

*) Vgl. die in der Anm., S. 287 zitierte Arbeit, S. 31 und 32.

setzungen den Grenzwert zu bestimmen, dem die mit einem geeigneten Faktor multiplizierte *Lambert*sche Reihe

$$(2.) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{x^n}{1-x^n}$$

zustrebt, wenn sich x im Winkelraum dem rationalen Randpunkte

$$x_0 = e^{2\pi i \frac{k'}{k}}$$

nähert. Betrachten wir z. B. den unter Formel (22.) befaßten Fall, daß $b_n = \frac{1}{n^3}$ ist, so ergibt sich:

$$(25.) \qquad \lim_{x=x_0} \left\{\left(1-\frac{x}{x_0}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \frac{x^n}{1-x^n}\right\} = \frac{1}{k^4} \cdot \zeta(4) = \frac{1}{k^4} \cdot \frac{\pi^4}{90}.$$

Denken wir uns die Peripherie des Einheitskreises auf die Strecke $0 \cdots 2\pi$ abgerollt, und diese im Verhältnis $2\pi : 1$ auf die Strecke $0 \cdots 1$ verkürzt, so ist durch (25.) für alle rationalen Werte $\frac{k'}{k}$ zwischen 0 und 1 (diese eingeschlossen, weil $k = 1$ entsprechend) eine Funktion definiert, die in nächster Beziehung zu der Randfunktion der *Lambert*schen Reihe $\Sigma \frac{1}{n^3} \frac{x^n}{1-x^n}$ steht. Da die Werte dieser Funktion um so kleiner sind, je größer k ist, so liegt die Vermutung nahe, daß sie für irrationale Punkte γ zwischen 0 und 1 den Wert 0 haben wird, wofern sie sich dort überhaupt durch eine zu (25.) analoge Beziehung definieren läßt. Es liegt also die Vermutung nahe, daß, $e^{2\pi i\gamma} = \xi$ gesetzt,

$$\lim_{x=\xi} \left\{\left(1-\frac{x}{\xi}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \frac{x^n}{1-x^n}\right\},$$

falls überhaupt vorhanden, den Wert 0 haben werde. In den folgenden Paragraphen werde ich zeigen, daß entsprechendes unter der Annahme, daß $\Sigma |b_n|$ konvergiert, für jede *Lambert*sche Reihe gilt, werde also den Satz beweisen:

Satz 7: *Es sei* $\Sigma |b_n|$ *konvergent,* γ *eine irrationale Zahl und* $e^{2\pi i\gamma} = \xi$. *Dann ist bei radialer Annäherung*

$$(26.) \qquad \lim_{x=\xi} \left\{\left(1-\frac{x}{\xi}\right) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{x^n}{1-x^n}\right\} = 0.$$

Um diesen Satz zu beweisen, bedarf ich einer erheblichen Verallgemeinerung des *Cesàro-Pringsheim*schen Satzes 4. Diese soll im folgenden Paragraphen gegeben werden. In § 6. werden wir diese Erweiterungen

für die *Lambert*schen Reihen nutzbar machen und den soeben formulierten Satz beweisen.

§ 5.

Es sei $d_n > 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ divergent, $\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ für $|x| < 1$ konvergent und für alle nahe bei $+1$ gelegenen Werte von x im Winkelraum

$$\frac{\left|\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n\right|}{\sum_{n=0}^{\infty} |d_n x^n|} \geqq \alpha > 0. \tag{27.}$$

Es seien

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(\lambda)} x^n \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots)$$

unendlich viele Potenzreihen. Für jedes λ sei

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n^{(\lambda)}}{d_n} = g_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots) \tag{28.}$$

vorhanden. Dann ist nach Satz 4 für jedes λ

$$\lim_{x=+1} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(\lambda)} x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n} = g_\lambda \tag{29.}$$

bei jeder Annäherung im Winkelraum. Genauer ausgeführt, bedeutet dies folgendes: Der bei dem Randpunkte $+1$ (und ebenso nachher bei x_0) angesetzte Winkelraum werde unveränderlich gedacht; seine Schenkel seien etwa stets symmetrisch zu dem nach dem Randpunkte gezogenen Radius gelegen und mögen mit diesem je einen festen Winkel $\varphi_0 < \frac{\pi}{2}$ einschließen.

Wenn dann $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben ist, so entspricht jedem λ ein solches Stück dieses Winkelraumes, daß für alle Punkte desselben

$$\left|\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(\lambda)} x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n} - g_\lambda\right| < \varepsilon \tag{30.}$$

ist. Dieses Stück wollen wir uns etwa stets durch eine zu dem nach dem Randpunkte führenden Radius senkrechte Gerade abgeschnitten denken. Ich will dann — unter Zusammenfassung aller hiermit getroffenen Vereinbarungen — kurz sagen: Jedem λ entspricht „ein bei $+1$ anzusetzendes Dreieck Δ_λ“, so daß für alle Punkte desselben (inkl. Rand, doch exkl. $+1$) die Beziehung (30.) gilt.

Ich behaupte nun genauer den

Satz 8: *Wenn die Voraussetzung* (28.) *gleichmäßig für alle* λ *gilt und wenn noch, unter* K *eine geeignete von* n *und* λ *unabhängige Konstante verstanden, für alle* n *und* λ

$$\left|\frac{a_n^{(\lambda)}}{d_n}\right| < K \tag{31.}$$

ist, so gilt auch (29.) *gleichmäßig für alle* λ.

Das soll heißen: Wenn es möglich ist, nach Wahl von $\varepsilon > 0$ *eine* Zahl m so anzugeben, daß

$$\left|\frac{a_n^{(\lambda)}}{d_n} - g_\lambda\right| < \varepsilon$$

ist für alle $n \geqq m$ und alle $\lambda = 1, 2, \ldots$, so läßt sich auch *ein* Dreieck Δ angeben, so daß (30.) für alle λ und alle x des bei $+1$ angesetzten Dreiecks Δ erfüllt ist.

Beweis. Setzt man wieder

$$\frac{a_n^{(\lambda)}}{d_n} = g_\lambda + \varepsilon_n^{(\lambda)},$$

so ist wegen (31.)

$$|\varepsilon_n^{(\lambda)}| < 2K$$

für alle n und alle λ, und sogar

$$|\varepsilon_n^{(\lambda)}| < \varepsilon$$

für alle $n \geqq m$ und alle λ. Also ist für alle λ

$$\left|\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(\lambda)} x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n} - g_\lambda\right| \leqq 2K \frac{\sum_{n=0}^{m-1} d_n |x^n|}{\left|\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n\right|} + \varepsilon \frac{\sum_{n=0}^{\infty} d_n |x^n|}{\left|\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n\right|},$$

woraus wegen (27.) die Behauptung sofort abgelesen werden kann.

Ist aber die Voraussetzung (28.) nicht gleichmäßig für alle λ erfüllt, so wird sich auch Δ nicht gleichmäßig für alle λ angeben lassen; der Beweis zeigt vielmehr unmittelbar, je langsamer die Quotienten (28.) gegen ihren Grenzwert g_λ konvergieren, um so dichter muß auch mit x an $+1$ gerückt, d. h. um so kleinere Δ_λ müssen genommen werden, um (30.) zu erfüllen. Wie klein Δ_λ zu nehmen ist, wird dabei nicht nur von den Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(\lambda)} x^n$, sondern auch von den Koeffizienten d_n abhängen, so daß man keinen allgemeinen Satz darüber wird aussprechen können, ohne die Dinge zu komplizieren. Wählt man aber bestimmte d_n, so lassen

sich analoge Sätze formulieren. Wir beschränken uns auf den Fall $d_n = 1$ und beweisen den

Satz 9: *Es seien unendlich viele im Einheitskreise konvergente Potenzreihen*

$$\mathfrak{P}_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(\lambda)} x^n \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots)$$

vorgelegt, und es sei die Gesamtheit der $a_n^{(\lambda)}$ *beschränkt:*

$$|a_n^{(\lambda)}| < K.$$

Für jedes bestimmte λ *sei*

$$\lim_{n=\infty} a_n^{(\lambda)} = g_\lambda$$

vorhanden. Die Annäherung der $a_n^{(\lambda)}$ *an ihren Grenzwert sei dabei von folgender Art:* Wenn $\varepsilon > 0$ gegeben, so lassen sich jedenfalls die Zahlen n_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$ so bestimmen, daß bei jedem λ für $n \geqq n_\lambda$

$$|a_n^{(\lambda)} - g_\lambda| < \frac{\varepsilon}{1+\beta}$$

ist; hierbei soll β eine — sicher vorhandene — positive Zahl bedeuten, so daß für alle x des Winkelraumes bei $+1$

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} |x^n|}{\left|\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right|} = \frac{|1-x|}{1-|x|} \leqq \beta$$

bleibt. *Es sei nun möglich, eine Zahl* m *so anzugeben, daß es*

$$n_\lambda = \lambda m$$

zu nehmen genügt). Dann ist es auch möglich, ein Dreieck* Δ (seine Basis sei $2c$, seine Höhe h) *anzugeben, so daß die Beziehung* (30.), *d. h. also jetzt*

$$(32.) \qquad \left|(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(\lambda)} x^n - g_\lambda\right| < \varepsilon$$

bei jedem λ *für alle* x *eines bei* $+1$ *angesetzten Dreiecks* Δ_λ *erfüllt ist, dessen Basis* $= \frac{2c}{\lambda}$ *ist**).*

---

*) Es handelt sich also um eine bestimmt charakterisierte Ungleichmäßigkeit in der Annäherung der Koeffizienten an ihre Grenzwerte. Man kann den Satz allgemeiner unter der Annahme formulieren, daß es $n_\lambda = f(\lambda) \cdot m$ zu nehmen genügt, und hierin $f(\lambda)$ irgend eine monoton mit λ wachsende positive Funktion bezeichnet. Doch ist für den vorliegenden Zweck nur der Fall $f(\lambda) = \lambda$ anzuwenden.

**) Die Ungleichmäßigkeit bei der Annäherung der *Funktionen* an ihre Grenze ist also eine ähnliche wie die der Koeffizienten an ihre Grenzwerte.

Beweis. Unter Benutzung derselben Bezeichnungen wie beim vorigen Beweise hat man

$$\left|(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(\lambda)} x^n - g_n\right| \leqq \frac{\sum_{n=0}^{\lambda m-1}\left|\varepsilon_n^{(\lambda)} x^n\right| + \frac{\varepsilon}{1+\beta}\sum_{n=0}^{\infty}|x^n|}{\left|\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right|}$$

$$\leqq 2K\,|1-x|\cdot\lambda m + \varepsilon\cdot\frac{\beta}{1+\beta}.$$

Wählt man nun c so, daß für alle x des bei $+1$ angesetzten Dreiecks Δ mit der Basis $2c$

$$2K\,|1-x|\cdot m < \frac{\varepsilon}{1+\beta}$$

ist, so ist ersichtlich für alle x eines dort angesetzten Dreiecks Δ_λ mit der Basis $\frac{2c}{\lambda}$ auch

$$2K\,|1-x|\,\lambda m < \frac{\varepsilon}{1+\beta}.$$

Also ist für jedes $\lambda = 1, 2, \ldots$ und alle x des zugehörigen Dreiecks Δ_λ

$$\left|(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(\lambda)} x^n - g_\lambda\right| < \varepsilon. \quad \text{w. z. b. w.}$$

Analog gilt endlich noch die folgende Erweiterung, die wir allein für unsere Zwecke nötig haben.

Satz 10: *Es sei für jedes* $\lambda = 1, 2, \ldots$

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_0^{(\lambda)} + a_1^{(\lambda)} + \cdots + a_n^{(\lambda)}}{n+1} = g_\lambda,$$

und zwar sei eine Zahl m *so angebbar, daß*

$$\text{(33.)} \qquad \left|\frac{a_0^{(\lambda)} + a_1^{(\lambda)} + \cdots + a_n^{(\lambda)}}{n+1} - g_\lambda\right| < \frac{\varepsilon}{1+\beta^2}$$

für alle $n \geqq n_\lambda = \lambda m$; *dann ist auch für jedes* λ

$$\lim_{x=1}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(\lambda)} x^n = g_\lambda,$$

und zwar ist ein Dreieck Δ *mit der Basis* $2c$ *so angebbar, daß*

$$\left|(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(\lambda)} x^n - g_\lambda\right| < \varepsilon$$

für alle x *in* Δ_λ *mit der Basis* $\frac{2c}{\lambda}$ *ist, wofern sich eine Konstante* K *angeben läßt, so daß für alle* n *und* λ

(34.) $$\left|\frac{a_0^{(\lambda)}+a_1^{(\lambda)}+\cdots+a_n^{(\lambda)}}{n+1}-g_\lambda\right|=|\varepsilon_n^{(\lambda)}|<\frac{\lambda}{n+1}K$$

*ist**).

Beweis. Setzt man

$$a_0^{(\lambda)}+a_1^{(\lambda)}+\cdots+a_n^{(\lambda)}=s_n^{(\lambda)},$$

so ist

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(\lambda)}x^n=(1-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}s_n^{(\lambda)}x^n=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}s_n^{(\lambda)}x^n}{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n}$$

und also, wenn jetzt $\frac{s_n^{(\lambda)}}{n+1}=g_\lambda+\varepsilon_n^{(\lambda)}$ gesetzt wird,

$$\left|(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(\lambda)}x^n-g_\lambda\right|=\left|\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n^{(\lambda)}(n+1)x^n}{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n}\right|$$

$$\leqq K\,\frac{\lambda\sum_{n=0}^{\lambda m-1}|x|^n+\frac{\varepsilon}{1+\beta^2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)|x|^n}{\left|\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\right|}.$$

War nun für alle x im Winkelraum

$$\frac{|1-x|}{1-|x|}\leqq\beta,$$

so ist für alle diese x auch

$$\frac{|1-x|^2}{(1-|x|)^2}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)|x|^n}{\left|\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\right|}\leqq\beta^2,$$

und also

$$\left|(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(\lambda)}x^n-g_\lambda\right|<K|1-x|^2\lambda^2m+\frac{\varepsilon}{1+\beta^2}\cdot\beta^2.$$

Wähle ich nun das Dreieck Δ so, daß für alle x desselben

$$K|1-x|^2\cdot m<\frac{\varepsilon}{1+\beta^2}$$

ist, so ist für alle x des Dreiecks Δ_λ auch

---

*) Statt dieser letzten Voraussetzung könnte man auch wieder die Beschränktheit der Quotienten $\frac{a_0^{(\lambda)}+\cdots+a_n^{(\lambda)}}{n+1}$ voraussetzen. Doch ist die obige Formulierung, die teils mehr teils weniger verlangt, für die Anwendung des Satzes 10 im folgenden Paragraphen vorteilhafter.

$$K\,|1-x|^2\cdot\lambda^2 m<\frac{\varepsilon}{1+\beta^2},\qquad (\lambda=1,2,\ldots)$$

und also für alle x in Δ_λ

$$\left|(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(\lambda)}x^n-g_\lambda\right|<\varepsilon,\qquad \text{w. z. b. w.}$$

§ 6.

Von dem letzten Satze 10 soll nun sogleich eine Anwendung auf die *Lambert*schen Reihen gemacht werden.

Es sei $\Sigma|b_n|$ konvergent und habe die Summe B; dann ist a fortiori $\Sigma\left|\frac{b_n}{n}\right|$ konvergent, und es ist also nach Satz 5 für jede Annäherung im Winkelraum

$$\lim_{x=x_0}\left\{\left(1-\frac{x}{x_0}\right)\sum_{n=1}^{\infty}b_n\frac{x^n}{1-x^n}\right\}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{b_{k\nu}}{k\nu}.$$

Bezüglich der Geschwindigkeit der Annäherung an diese Grenzwerte behaupte ich nun den

Satz 11: *Es läßt sich bei gegebenem $\varepsilon>0$ ein Dreieck Δ mit der Basis $2c$ so angeben, daß*

$$\left|\left(1-\frac{x}{x_0}\right)\sum_{n=1}^{\infty}b_n\frac{x^n}{1-x^n}-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{b_{k\nu}}{k\nu}\right|<\varepsilon \tag{35.}$$

ist, sobald x in einem bei dem Randpunkte $x_0=e^{2\pi i\frac{k'}{k}}$ angesetzten Dreiecke Δ_k mit der Basis $\frac{2c}{k}$ liegt.

Die Basen der an die verschiedenen rationalen Randpunkte anzusetzenden Dreiecke, in denen (35.) gelten soll, verhalten sich also umgekehrt wie die Nenner der die Randpunkte charakterisierenden rationalen Zahlen $\frac{k'}{k}$.

Beweis. Nähert sich in

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\frac{x^n}{1-x^n}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n\qquad (a_n=\sum_{d/n}b_d)$$

x dem Randpunkte $x_0=e^{2\pi i\frac{k'}{k}}$, so bedeutet dies, daß man sich in

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n x_0^n)x^n \tag{36.}$$

dem Randpunkte $+1$ nähert. Ich betrachte daher im Sinne des § 5 die unendlich vielen Potenzreihen (36.), die für alle möglichen rationalen irreduziblen $\frac{k'}{k}$ entstehen, — etwa nach der Größe der Nenner k geordnet. Für jedes bestimmte k (k' ist ohne Einfluß) ist, wie in § 3 erwähnt,

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n}{n+1} = g_k = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_{k\nu}}{k\nu}.$$

Und zwar ergab sich zunächst die Beziehung (23.)

$$\left| (a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n) - \sum_{\nu k \leq n} b_{k\nu} \left[\frac{n}{k\nu}\right] \right| \leqq k \sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu|,$$

aus der nun bei konvergenter $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = B$

$$\left| (a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n) - n \sum_{\nu k \leq n} \frac{b_{k\nu}}{k\nu} \right| < (k+1)B$$

und also erstlich die Tatsache folgt, daß eine Konstante K existiert, so daß für alle λ und alle n

$$\left| \frac{a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n}{n+1} - g_k \right| = |\varepsilon_n^{(k)}| < \frac{k}{n+1} K$$

ist.

Ist also $\varepsilon > 0$ gegeben und wählt man m so groß, daß

$$\frac{K}{m} < \frac{\varepsilon}{1+\beta^2}$$

ist, so ist für alle $k = 1, 2, \ldots$

$$\left| \frac{a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n}{n+1} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_{k\nu}}{k\nu} \right| < \frac{\varepsilon}{1+\beta^2},$$

sobald $n \geqq n_k = km$ ist, d. h. die Voraussetzungen des Satzes 10 sind sämtlich erfüllt. Es läßt sich also *ein* Dreieck Δ mit der Basis $2c$ angeben, so daß bei jedem k

$$\left| (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} (a_n x_0^n) x^n - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_{k\nu}}{k\nu} \right| < \varepsilon$$

ist, sobald x in einem bei $+1$ angesetzten Dreieck Δ_k mit der Basis $\frac{2c}{k}$ liegt. Setzt man jetzt wieder $\frac{x}{x_0}$ für x, so erhält man genau die in (35.) ausgedrückte Beziehung, womit der Satz 11 vollständig bewiesen ist.

Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich nun unmittelbar der in § 4 formulierte Satz 7 beweisen.

Denn auf Grund der Ergebnisse dieses Paragraphen genügt es zu zeigen, daß die einem gegebenem $\varepsilon > 0$ entsprechenden und an die sämt-

lichen rationalen Randpunkte $x_0 = e^{2\pi i \frac{k'}{k}}$ angesetzten Dreiecke Δ_k — wie klein auch die Basis $2c$ des Dreiecks Δ sein mag — ein gewisses bei ξ gelegenes Stück des nach ξ führenden Radius lückenlos überdecken; es genügt also zu zeigen, daß es eine positive Zahl $\vartheta < 1$ gibt, so daß jeder Punkt x des genannten Radius zwischen $\vartheta\xi$ und ξ (exkl.) im Innern oder auf dem Rande mindestens eines der Dreiecke Δ_k liegt.

Wegen der Konkavität des Kreises genügt es hierzu wieder, das folgende zu zeigen: Auf der Strecke $0 \ldots 1$ sei in γ nach einer Seite ein Lot errichtet; in jedem rationalen Punkte $\frac{k'}{k}$ $((k', k) = 1)$ sei ein gleichschenkliges Dreieck Δ_k mit der Spitze so angesetzt, daß seine Basis parallel zur Strecke $0 \ldots 1$ läuft und auf derselben Seite wie das Lot in γ liegt. Alle diese Dreiecke seien untereinander ähnlich, ihr Winkel an der Spitze $= 2\varphi_0 \left(0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}\right)$ und ihre Basen $= \frac{2c}{k}$.

Wie klein dann auch c gewählt werde: alle hinreichend nahe bei γ gelegenen Punkte des dort errichteten Lotes liegen in mindestens einem der Dreiecke Δ_k.

Beweis. Es werde γ in einen Kettenbruch entwickelt, und es seien

$$\frac{k_1'}{k_1}, \frac{k_2'}{k_2}, \ldots \frac{k_\mu'}{k_\mu}, \ldots$$

die Näherungsbrüche. Dann wird es genügen, die in diesen Punkten angesetzten Dreiecke $\Delta_{k_\mu} = \Delta^\mu$ zu betrachten. Dabei liegen die Punkte

$$\frac{k_{2\lambda-1}'}{k_{2\lambda-1}} \text{ links, die Punkte } \frac{k_{2\lambda}'}{k_{2\lambda}} \text{ rechts}$$

von γ und ihr Abstand von γ ist

$$\left| \frac{k_\mu'}{k_\mu} - \gamma \right| < \frac{1}{k_\mu k_{\mu+1}}.$$

Von einer gewissen Stelle an überlagern daher die Dreiecke Δ^μ jedenfalls ein Stück des Lotes. Denn dazu braucht nur

$$\left| \frac{k_\mu'}{k_\mu} - \gamma \right| < \frac{c}{k_\mu}$$

zu sein, was erreicht wird, sobald

$$\frac{1}{k_\mu k_{\mu+1}} < \frac{c}{k_\mu},$$

sobald also

$$k_{\mu+1} > \frac{1}{c}$$

ist. Dies ist für alle μ von einer gewissen Stelle an der Fall. Jedes der zugehörigen Dreiecke Δ^μ läßt aber gegen γ hin noch ein Stück des Lotes frei. Ich behaupte nun — und darauf kommt der ganze Beweis jetzt zurück — daß ich μ_0 so groß wählen kann, daß für alle $\mu \geqq \mu_0$ das von Δ^μ freigelassene Stück kleiner ist als die Höhe des folgenden Dreiecks $\Delta^{\mu+1}$.

Nun ist aber das von Δ^μ noch freigelassene Stück des Lotes, wie man aus einer einfachen Skizze sofort erkennt,

$$< \frac{h}{c k_\mu k_{\mu+1}}, \quad (h = \text{Höhe von } \Delta)$$

während die Höhe von $\Delta^{\mu+1}$ den Wert $\frac{h}{k_{\mu+1}}$ hat. Es braucht also nur

$$\frac{h}{k_{\mu+1}} > \frac{h}{c k_\mu k_{\mu+1}} \text{ oder } k_\mu > \frac{1}{c}$$

zu sein. Das ist aber, wie klein auch c sein mag, für alle $\mu \geqq \mu_0$ bei geeigneter Wahl von μ_0 erfüllt.

Der hiermit vollständig bewiesene Satz 7 läßt sich auch auf komplexe Annäherung an einen irrationalen Randpunkt ξ erweitern, wenn man die (einschränkende) Voraussetzung macht, daß die Gesamtheit der Teilnenner der Kettenbruchentwicklung von γ — sie mögen mit $q_1, q_2, \ldots$ bezeichnet werden — beschränkt ist, daß es also eine von μ unabhängige positive Zahl A gibt, so daß stets

$$q_\mu < A$$

bleibt. — Es genügt sogar schon die Annahme, daß von einer gewissen Stelle an

$$q_\mu < \delta a_{\mu-2}$$

sei, wie klein auch $\delta > 0$ angenommen werde. Diese Bedingung verlangt offenbar weniger als die vorige. Man zeigt, daß unter dieser Annahme die Δ^μ sogar ein bei γ (bzw. ξ) angesetztes Dreieck Δ' vollständig überdecken. —

§ 7.

A. Durch die Sätze der §§ 2 und 3 haben sich ziemlich allgemeine Klassen von *Lambert*schen Reihen ergeben, die im Einheitskreise Funktionen darstellen, die darüber hinaus nicht fortsetzbar sind. Hierzu gehören insbesondere alle Reihen

(37.) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \frac{x^n}{1-x^n},$$

falls $\Re(s) > 0$ oder $s = 0$ ist.

Dagegen führen dieselben Methoden bei den Reihen (37.) nicht zum Ziel, wenn s eine (komplexe) Zahl bedeutet, für die $\Re(s) < 0$ ist. Folgendermaßen läßt sich zeigen, daß auch in diesem Falle die Reihen (37.), also die Reihen

(38.) $$\sum_{n=1}^{\infty} n^s \frac{x^n}{1-x^n}, \quad \Re(s) > 0$$

nicht fortsetzbare Funktionen definieren:

Es ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^s \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d/s} d^s\right) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d/n} \left(\frac{n}{d}\right)^s\right) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^s \left(\sum_{d/n} \frac{1}{d^s}\right) x^n.$$

Da nun die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d/n} \frac{1}{d^s}\right) x^n$$

die Potenzreihenentwicklung der *Lambert*schen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \frac{x^n}{1-x^n}$$

ist und diese nach dem soeben Bemerkten für $\Re(s) > 0$ nicht fortsetzbar ist, so genügt es offenbar, den folgenden allgemeinen Satz über Potenzreihen zu beweisen:

Satz 12: *Die beiden Potenzreihen*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad \textit{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^s x^n$$

sind in genau denselben Punkten des (gemeinsamen) Konvergenzkreises singulär, wenn s eine beliebige (komplexe) Zahl bedeutet.

Beweis. Wegen der Symmetrie in den Voraussetzungen genügt es zu zeigen: Wenn $\Sigma a_n x^n$ für $|x| < 1$ konvergiert und eine in $+1$ reguläre Funktion darstellt, so ist auch die durch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} x^n$$

für $|x| < 1$ dargestellte Funktion in $+1$ regulär. Da der Satz überdies für reelle ganzzahlige s trivial ist, so genügt es sogar, $0 < \Re(s) \leq 1$ anzunehmen. Denn wäre für diese s der Satz schon bewiesen, so ergibt er sich sofort für jedes andere s; man hat nur die ganze Zahl p gemäß

$$p < \Re(s) \leqq p+1$$

zu bestimmen. Dann ist $0 < \Re(s-p) \leqq 1$ und also mit $\Sigma a_n x^n$ auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{s-p}} x^n$$

in $+1$ regulär, und also auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} x^n$$

in $+1$ regulär.

Es sei also $\Sigma a_n x^n$ für $|x| < 1$ konvergent und die hierdurch im Einheitskreise definierte analytische Funktion $f(x)$ in $+1$ regulär, und es sei $0 < \Re(s) \leqq 1$. Da dann $\Sigma a_n x^n$ für alle $|x| \leqq \varrho < 1$ gleichmäßig konvergiert, so darf man in dem geradlinig zu nehmenden Integral

$$I = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 \left(\log \frac{1}{t}\right)^{s-1} f(tx) \frac{dt}{t}$$

nach Einsetzen der Potenzreihe für $f(tx)$ gliedweis integrieren. Es ist aber, wenn $\log \frac{1}{t} = u$ gesetzt wird,

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 \left(\log \frac{1}{t}\right)^{s-1} a_n (tx)^n \frac{dt}{t} = \frac{a_n x^n}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} e^{-nu} u^{s-1} du$$

$$= \frac{a_n x^n}{n^s \Gamma(s)} \int_0^{\infty} e^{-v} v^{s-1} dv = \frac{a_n}{n^s} x^n,$$

und also das ganze Integral

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} x^n = F(x).$$

Ist andrerseits $f(x)$ in $+1$, also auf der ganzen Strecke $0 \ldots 1$, regulär, so kann man ein Gebiet T abgrenzen, das diese Strecke ganz im Innern enthält und in dem $f(x)$ überall regulär ist. In diesem Gebiete T stellt dann auch das Integral I eine reguläre Funktion dar. In dem im Innern des Einheitskreises gelegenen Teil von T ist diese Funktion $= F(x)$; demnach ist $F(x)$ in T, insbesondere also in $+1$ regulär, w. z. b. w.

Damit ist die Nichtfortsetzbarkeit auch der Reihen (38.) für $\Re(s) > 0$ bewiesen.

B. Das *Euler*sche Produkt $\Pi(1-x^n)$ ist (vgl. § 1, (7.))

$$\Pi(1-x^n) = e^{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{x^n}{1-x^n}} \tag{39.}$$

und andrerseits als Potenzreihe entwickelt

$$= 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \left(x^{\frac{3\nu^2-\nu}{2}} + x^{\frac{3\nu^2+\nu}{2}} \right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \pi_n x^n,$$

wo also $\pi_0 = 1$ und im übrigen

$$\pi_n = \begin{cases} (-1)^{\nu}, \text{ wenn } n \text{ gleich der Pentagonalzahl } \frac{3\nu^2 \pm \nu}{2} \text{ ist,} \\ 0, \text{ in allen andern Fällen.} \end{cases}$$

Aus der Darstellung (39.) der durch diese Reihe definierten Funktion folgt nun sofort der

Satz: *Es ist bei komplexer Annäherung*

$$\lim_{x=x_0} \Pi(1 - x^n) = \lim_{x=x_0} \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n x^n = 0$$

für jeden rationalen Randpunkt $x_0 = e^{2\pi i \frac{k'}{k}}$. *Speziell also: Die durch das Eulersche Produkt im Einheitskreise dargestellte Funktion kann über diesen hinaus nicht fortsetzbar sein.*

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 142.

Heft 4.

Ausgegeben den 19. März.

Berlin W. 35

Druck und Verlag von Georg Reimer.

1913.

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Jeder Band 16 Mark.

Hierzu ein Bücherverzeichnis Nr. 482 von **R. Friedlaender & Sohn, Berlin NW. 6, Karlstraße 11.**

Band 142. Heft 4.

Inhaltsverzeichnis.

Kürschák, J., Über Limesbildung und allgemeine Körpertheorie. (Schluß) Seite 245

Perron, Oskar, Über lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhängig Variable reell ist. (Erste Mitteilung.) . . . . . — 254

Rosanes, J., Zur Theorie der Kegelschnitte . . . . . — 271

Remak, R., Neuer Beweis eines *Minkowski*schen Satzes . . . . . — 278

Knopp, Konrad, Über *Lambert*sche Reihen . . . . . — 283

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

Verlag von Georg Reimer Berlin W 35

Kants
Populäre Schriften

Unter Mitwirkung der Kant-Gesellschaft

herausgegeben von

Prof. Dr. Paul Menzer

Geheftet 4 Mark — Gebunden 5 Mark

Inhalt: Aus der allgemeinen Naturgeschichte und Theorie des Himmels: Von der Schöpfung im ganzen Umfange ihrer Unendlichkeit. — Von den Bewohnern der Gestirne. — Gedanken bei dem frühzeitigen Ableben des Herrn Johann Friedrich von Funk. — Beobachtungen über das Gefühl des Schönen und Erhabenen. — Träume eines Geistersehers, erläutert durch Träume der Metaphysik. — Idee zu einer allgemeinen Geschichte in weltbürgerlicher Absicht. — Beantwortung der Frage: Was ist Aufklärung? — Aus der Grundlegung zur Metaphysik der Sitten: Übergang von der gemeinen sittlichen Vernunfterkenntnis zur philosophischen. — Über das Mißlingen aller philosophischen Versuche in der Theodizee. — Brief an Maria von Herbert. — Das Ende aller Dinge. — Zum ewigen Frieden. — Aus dem Streit der Fakultäten: Ob das menschliche Geschlecht im beständigen Fortschreiten zum Besseren sei. — Von der Macht des Gemüts.

Verlag von Georg Reimer Berlin W 35